CORRECTION DU CB N°2

1) i) $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi}{4}$

ii) $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \frac{\pi}{4}$

iii) $\text{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$

2) Le domaine de définition de l'équation (E) : Arccos(x) = Arcsin(2x) est $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, SI x est solution de (E) ALORS :

$\sin(\text{Arccos}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(2x)) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

RECIPROQUEMENT, pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a :

$\sin(\text{Arccos}(x)) = \sin(\text{Arcsin}(2x))$ et $(\text{Arccos}(x)\,;\,\text{Arcsin}(2x)) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2$, d'où

Arccos(x) = Arcsin (2x).

Finalement l'ensemble des solution est $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

3) i) $D_g =]-1;1[$

ii) $g(x) = \frac{\sin(\text{Arcsin}(x))}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) f : $x \mapsto \text{Artcan}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$, f est 2π-périodique et $\forall x \in D_f$, $f(\pi - x) = f(x)$. On étudie donc f sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, puis on effectue la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

<u>METHODE ANALYTIQUE :</u>

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f'(x) = \frac{-1}{2}$ et donc $f(x) = \frac{-x}{2}+k$.

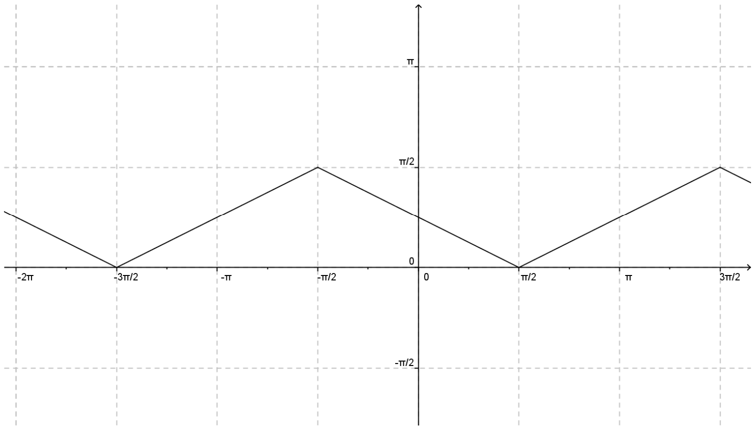
Or $f(0) = \frac{\pi}{4} = k$, donc $f(x) = \frac{-x}{2}+\frac{\pi}{4}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

METHODE ALGEBRIQUE :

Soit x $\in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

donc f(x) = $\mathrm{Arctan}\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|$.

Comme pour x $\in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on déduit : f(x) = $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$.



CORRECTION DU CB N°2

1) i) $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\pi}{3}$;

ii) $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \frac{\pi}{6}$

iii) $\text{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

2) Le domaine de définition de l'équation (E) : Arccos(2x) = Arcsin(x) est $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, SI x est solution de (E) ALORS :

cos(Arccos(2x)) = cos(Arcsin(x)) $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

RECIPROQUEMENT, pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a :

cos(Arccos(2x)) = cos(Arcsin(x)) et (Arccos(2x) ; Arcsin(x)) $\in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2$, d'où

Arccos(2x) = Arcsin (x).

Finalement l'ensemble des solution est $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

3) i) $D_g = [-1;1] \setminus \{0\}$

ii) $g(x) = \frac{\sin(\text{Arccos}(x))}{\cos(\text{Arccos}(x))} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

4) f : $x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$D_f = \mathbb{R}$ et f est paire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \frac{-2x}{2+2x^2+x^4}$ qui est du signe opposé de x.

Or $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $f'(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.