CORRECTION DU CB N°6

1- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cos(3n)}{3n} = 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite 0)

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 3n\sin\left(\frac{2}{n}\right) \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} 3\times 2\times \frac{\sin(2x)}{2x} = 6$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$

2- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

$r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3, r = e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}}$, donc $u_n = a\cos\dfrac{2n\pi}{3} + b\sin\dfrac{2n\pi}{3}$.

De plus, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \Rightarrow a = 0$ et $b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

3- Soient la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

<u>Remarque</u> : la suite (u_n) est bien définie, car f est une fonction positive.

i) $f'(x) = \dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ donc f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. $f\circ f$ est donc strictement croissante et donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. De plus, ∀x ⩾ 0, $0 < f(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \leq 2$ donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, donc convergentes vers un point fixe de $f\circ f$.

Or $f\circ f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

ii) Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

CORRECTION DU CB N°6

1- $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sin(2n)}{2n} = 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite 0)

$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 2n\tan\left(\frac{3}{n}\right) \underset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} 2\times 3\times\frac{\tan(3x)}{3x} = 6$

$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{k}-\frac{3}{k-1}\right) = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{1}{n}-1\right) = -3$

2- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 0, \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

$r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -3, r = e^{\pm 2i\frac{\pi}{3}}$, donc $u_n = a\cos\frac{2n\pi}{3} + b\sin\frac{2n\pi}{3}$

De plus, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 \Rightarrow a = 1$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3- Soient la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2, \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

<u>*Remarque*</u> *: la suite (u_n) est bien définie, car f est une fonction positive.*

i) $f'(x) = \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$ donc f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. $f\circ f$ est donc strictement croissante et donc les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. De plus, ∀x ⩾ 0, $0 < f(x) = \frac{2}{1+x^2} \leq 2$ donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, donc convergentes vers un point fixe de $f\circ f$.

Or $f\circ f(x) = x \Leftrightarrow \frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

ii) Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.