C.B. N° 10	**ESPACES VECTORIELS APPLICATIONS LINEAIRES**	**16/04/13**

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x + 5y - z = 0 \}$.

ii) $F = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y - z + t = 0 \text{ et } x + y - t = 0 \}$.

iii) $G = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x + y - z)^2 = (2x + y)^2 \}$.

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$u = (-1 ; 1 ; 1 ; 0)$, $v = (2 ; 1 ; -1 ; 0)$, $w = (1 ; 1 ; 1 ; 1)$, $x = (0 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $y = (1 ; 1 ; 0 ; -2)$.

Soient $E = \text{Vect}\{u ; v ; w\}$ et $F = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?

b) Déterminer une base de $E \cap F$.

c) Déterminer une base de $E + F$.

3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, en déterminer le noyau et l'image.

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_1(x ; y ; z) = (x + 2y - z ; x + y ; z)$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_2(x ; y ; z) = (x + y - z^2 ; x + y ; z)$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_3(x ; y) = (x + y ; x - y ; x)$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ f_4(x ; y ; z) = (x + y + z ; x - y - 2z)$.

C.B. N° 10	ESPACES VECTORIELS APPLICATIONS LINEAIRES	16/04/13

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 5x + y - 2z = 0 \}$.

ii) $F = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (y - z)^2 = (x + y + z)^2 \}$.

iii) $G = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - 2z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0 \}$.

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$u = (0 ; 1 ; 1 ; -1)$, $v = (0 ; 1 ; -1 ; 2)$, $w =(1 ; 1 ; 1 ; 1)$, $x = (0 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $y = (-2 ; 1 ; 0 ; 1)$.

Soient $E = \text{Vect}\{ u ; v ; w\}$ et $F = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?

b) Déterminer une base de $E \cap F$.

c) Déterminer une base de $E + F$.

3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, en déterminer le noyau et l'image.

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_1 (x ; y ; z) = (2x + y - z ; x + z ; y)$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_2 (x ; y) = (x - y ; x + y ; y)$.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_3 (x ; y ; z) = (x^2 + y - z ; x + y + z ; z)$.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ f_4 (x ; y ; z) = (2x + y - z ; x + y - z)$.