C.B. N° 10	Correction	2012-2013

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x + 5y - z = 0 \}$.

$(X = (x ; y ; z ; t) \in E) \Leftrightarrow (X = x(1 ; 0 ; 2 ; 0) + y(0 ; 1 ; 5 ; 0) + t(0 ; 0 ; 0 ; 1))$

$E = \text{Vect}\{(1 ; 0 ; 2 ; 0) ; (0 ; 1 ; 5 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)\}$.

$\lambda(1 ; 0 ; 2 ; 0) + \mu(0 ; 1 ; 5 ; 0) + \nu(0 ; 0 ; 0 ; 1) = (0;0;0;0) \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$

$\{(1 ; 0 ; 2 ; 0) ; (0 ; 1 ; 5 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)\}$ est une base de E.

ii) $F = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y - z + t = 0 \text{ et } x + y - t = 0 \}$.

$(X (x ; y ; z ; t) \in F) \Leftrightarrow (X = x(1 ; 0 ; 3 ; 1) + y(0 ; 1 ; 0 ; 1))$

$F = \text{Vect}\{(1 ; 0 ; 3 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0 ; 1)\}$. Les deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires.

$\{(1 ; 0 ; 3 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0 ; 1)\}$ est une base de F.

iii) $G = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x + y - z)^2 = (2x + y)^2 \}$.

$u = (1 ; 1 ; -1)$ $v = (0 ; 1 ; 0)$ sont des vecteurs de G. $u + v = (1 ; 2 ; -1)$ n'est pas dans G.
G n'est donc pas un espace vectoriel.

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$u = (-1 ; 1 ; 1 ; 0)$, $v = (2 ; 1 ; -1 ; 0)$, $w = (1 ; 1 ; 1 ; 1)$, $x = (0 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $y = (1 ; 1 ; 0 ; -2)$.

Soient $E = \text{Vect}\{u ; v ; w\}$ et $F = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?

$\lambda u + \mu v + \nu w = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$; $\{u ; v ; w\}$ est une famille libre donc $\dim E = 3$.

x et y ne sont clairement pas colinéaires donc $\dim F = 2$.

b) Déterminer une base de $E \cap F$.

$$X \in E \cap F \Leftrightarrow X = au + bv + cw = dx + ey \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b + c = e \\ a + b + c = e \\ a - b + c = d \\ c = -2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = 2e \\ c = -2e \\ d = -3e \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X = e(u + 2v - 2w) = e(-3x + y)$

$E \cap F = \text{Vect}\{(1;1;-3;-2)\}$

c) Déterminer une base de E + F .

$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 4$ donc $E + F = \mathbb{R}^4$

3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, en déterminer le noyau et l'image.

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;/\; f_1(x\,;y\,;z) = (x + 2y - z\,;x + y\,;z)$.

f_1 est linéaire ; $\mathrm{Ker}(f_1) = \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$; f_1 est donc bijective. $\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^3$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;/\; f_2(x\,;y\,;z) = (x + y - z^2\,;x + y\,;z)$.

$f_2(0\,;0\,;1) = (-1\,;0\,;1)$; $f_2(0\,;0\,;2) = (-4\,;0\,;2) \neq 2\,f_2(0\,;0\,;1)$

f_2 n'est pas inéaire.

iii) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;/\; f_3(x\,;y) = (x + y\,;x - y\,;x)$.

f_3 est linéaire ; $\mathrm{Ker}(f_3) = \left\{0_{\mathbb{R}^2}\right\}$; le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(f_3) = 2$;

$\mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}\{f_3((1\,;0))\,;f_3((0\,;1))\} = \mathrm{Vect}\{(1;1;1);(1;-1;0)\}$

iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;/\; f_4(x\,;y\,;z) = (x + y + z\,;x - y - 2z)$.

f_4 est linéaire ; $\mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Vect}\{(1\,;-3\,;2)\}$; le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(f_4) = 2$;

Comme f_4 est à valeur dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f_4) = \mathbb{R}^2$.

C.B. N° 10	ESPACES VECTORIELS APPLICATIONS LINEAIRES	16/04/13

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 5x + y - 2z = 0 \}$.

$(X = (x ; y ; z ; t) \in E) \Leftrightarrow (X = x(1 ; -5 ; 0 ; 0) + z(0 ; 2 ; 1 ; 0) + t(0 ; 0 ; 0 ; 1))$

$E = \text{Vect}\{(1 ; -5 ; 0 ; 0) ; (0 ; 2 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)\}$.

$\lambda(1 ; -5 ; 0 ; 0) + \mu(0 ; 2 ; 1 ; 0) + \nu(0 ; 0 ; 0 ; 1) = (0;0;0;0) \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$

$\{(1 ; -5 ; 0 ; 0) ; (0 ; 2 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)\}$ est une base de E.

ii) $F = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (y - z)^2 = (x + y + z)^2 \}$.

$u = (0 ; 1 ; 0)$ $v = (0 ; 0 ; 1)$ sont des vecteurs de F. $u + v = (0 ; 1 ; 1)$ n'est pas dans F.
F n'est donc pas un espace vectoriel.

iii) $G = \{ (x ; y ; z ; t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y - 2z + t = 0 \text{ et } x + z - t = 0 \}$.

$(X(x ; y ; z ; t) \in G) \Leftrightarrow (X = x(1 ; -2 ; 0 ; 1) + z(0 ; 1 ; 1 ; 1))$

$F = \text{Vect}\{(1 ; -2 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 1 ; 1)\}$. Les deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires.

$\{(1 ; -2 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 1 ; 1)\}$ est une base de F.

2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$u = (0 ; 1 ; 1 ; -1)$, $v = (0 ; 1 ; -1 ; 2)$, $w = (1 ; 1 ; 1 ; 1)$, $x = (0 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $y = (-2 ; 1 ; 0 ; 1)$.

Soient $E = \text{Vect}\{ u ; v ; w\}$ et $F = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?

$\lambda u + \mu v + \nu w = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$; $\{u ; v ; w\}$ est une famille libre donc $\dim E = 3$.

x et y ne sont clairement pas colinéaires donc $\dim F = 2$.

b) Déterminer une base de $E \cap F$.

$$X \in E \cap F \Leftrightarrow X = au + bv + cw = dx + ey \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2e \\ a + b + c = e \\ a - b + c = d \\ -a + 2b + c = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = 2e \\ c = -2e \\ d = -3e \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X = e(u + 2v - 2w) = e(-3x + y)$

$E \cap F = \text{Vect}\{(-2;1;-3;1)\}$

c) Déterminer une base de E + F .

$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 4$ donc $E + F = \mathbb{R}^4$

3. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, en déterminer le noyau et l'image.

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_1(x\,;y\,;z) = (2x + y - z\,;x + z\,;y)$.

f_1 est linéaire ; $\mathrm{Ker}(f_1) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; f_1 est donc bijective. $\mathrm{Im}(f_1) = \mathbb{R}^3$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_2(x\,;y) = (x - y\,;x + y\,;y)$.

f_2 est linéaire ; $\mathrm{Ker}(f_2) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$; le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(f_2) = 2$;

$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}\{f_2((1\,;0))\,;f_2((0\,;1))\} = \mathrm{Vect}\{(1;1;0);(-1;1;1)\}$

iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ f_1(x\,;y\,;z) = (x^2 + y - z\,;x + y + z\,;z)$.

$f_3(1\,;0\,;0) = (1\,;1\,;0)$; $f_3(2\,;0\,;0) = (4\,;2\,;0) \neq 2\,f_3(0\,;0\,;1)$

f_3 n'est pas inéaire.

iv) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ f_2(x\,;y\,;z) = (2x + y - z\,;x + y - z)$.

f_4 est linéaire ; $\mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Vect}\{(0\,;1\,;1)\}$; le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(f_4) = 2$;

Comme f_4 est à valeur dans $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(f_4) = \mathbb{R}^2$.