C.B. N° 11	Correction	2012-2013

1. Soient $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

.Déterminer Ker f : Ker(f) = Vect{(0 ; 1 ; 1)} et Im f : Im(f) = Vect{(1; 0; 1), (1; -1; 0)}

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ les matrice des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^3$ dans une base $\{e_1 ; e_2 ; e_3\}$.

Soient $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 + e_3$.

a) Vérifier que la famille $B' = \{f_1 ; f_2 ; f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\det_B(f_1 ; f_2 ; f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc B' est une base.

b) Ecrire les matrices de φ et ψ dans B'.

$$\mathrm{mat}_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \ \mathrm{mat}_{B'}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système suivant par la méthode de Cramer : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \end{cases}$

$$S = \left\{\left(-\frac{1}{5} ; \frac{3}{5} ; \frac{3}{5}\right)\right\}$$

C.B. N° 11	Correction	2012-2013

1. Soient $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

.Déterminer Ker f : Ker(f) = Vect{(1 ; 1 ; -1)} et Im f : Im(f) = Vect{(1; 1; 1), (0; -1; 0)}

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ les matrice des endomorphismes φ et ψ de $\mathbb{R}^3$ dans une base $\{e_1 ; e_2 ; e_3\}$.

Soient $f_1 = e_1 + e_3$, $f_2 = e_2 + e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

a) Vérifier que la famille B'= $\{f_1 ; f_2 ; f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\det_B(f_1 ; f_2 ; f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, donc B' est une base.

b) Ecrire les matrices de φ et ψ dans B'.

$$\operatorname{mat}_{B'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \operatorname{mat}_{B'}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système suivant par la méthode de Cramer : $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$

$$S = \left\{ \left(-\frac{2}{3} ; \frac{7}{9} ; \frac{-10}{9} \right) \right\}$$