C.B. N° 12	Correction	2012-2013

1. Calculer l'intégrale triple suivante :

I = $\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ où $D=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+z\le 1;\, z\ge 0;\, x\ge y^2;\, y\ge 0\}$.

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^{\sqrt{x}} z\,dy\right)dx\right)dz=\int_0^1\left(\int_0^{1-y^2}\left(\int_{y^2}^{1-z} z\,dx\right)dz\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{x}}\left(\int_0^{1-x} z\,dz\right)dy\right)dx=\frac{8}{105}$$

2. Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variables proposé :

J = $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$ où $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x>0;\, y>0;\, x+y<1\}$,

avec u = x + y et v = x – y.

$$J=\int_0^1\left(\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\frac{1}{2}dv\right)du=\frac{1}{4}\left(e-e^{-1}\right)$$

3. Soit $\mathcal{B}=(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe d'un espace vectoriel euclidien E.
On considère l'application f : E $\to$ E , M(x ; y ; z) $\mapsto$ M'(x' ; y' ; z') tel que :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{45}(40x+5y-20z)\\ y'=\dfrac{1}{45}(-13x+40y-16z)\\ z'=\dfrac{1}{45}(16x+20y+37z)\end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

Rotation d'axe Vect{(-2 ; 2 ; 1)}, d'angle $-\operatorname{Arccos}\left(\frac{4}{5}\right)$

C.B. N° 12	Correction	2012-2013

1. Calculer l'intégrale triple suivante :

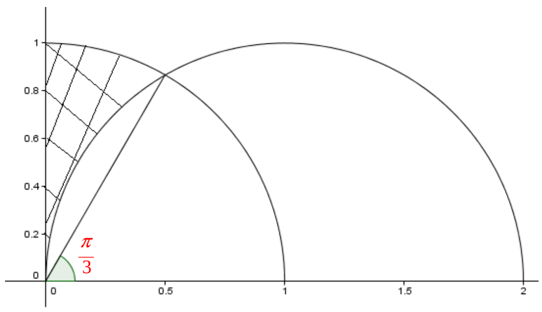
I = $\iiint_D \frac{z}{(x+y)^2}dxdydz$ où D = {(x ; y ; z) ∈ $\mathbb{R}^3$ / $x \geq 1; y \geq 1; x+y \leq 3; 1 \leq z \leq 2$ }.

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{z}{(x+y)^2} dy \right) dx \right) dz = \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3} \right)$$

2. Calculer l'intégrale suivante en utilisant un changement de variables en polaires :

J = $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où D = {(x ; y) ∈ $\mathbb{R}^2$ / $x \geq 0; y \geq 0; x^2+y^2 \leq 1; (x-1)^2+y^2 \geq 1$ }.

$$J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos(\theta)}^{1} r^3 dr \right) d\theta = \frac{7\sqrt{3}}{16} - \frac{5}{24}\pi$$



3. Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe d'un espace vectoriel euclidien E.

On considère l'application f : E → E, M(x ; y ; z) ↦ M'(x' ; y ; z') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x + y + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z\right) \\ y' = \frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{2}y+z\right) \\ z' = \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x - y + \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z\right) \end{cases}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

Rotation d'axe Vect{(1 ; 0 ; 1)}, d'angle $-\frac{\pi}{4}$