C.B. N° 6	Correction	2012-2013

1- Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les lois + et * par :
(x ; y) + (a ; b) = (x + a ; y + b) et (x ; y) * (a ; b) = (bx + ay ; ax + by).

i) Montrer que ($\mathbb{R}^2$, + , *) est un anneau commutatif.

Les lois + et * sont deux LCI, associatives et commutatives, d'éléments neutres respectifs 0 = (0 ; 0) et 1 = (0 ; 1). Le symétrique pour la loi + de (x, y) est (-x, -y). La loi * est distributive par rapport à la loi +.

ii) Est-ce un corps ? Justifier la réponse.

Non, ce n'est pas un corps car (x, x) et (x, -x) n'ont pas de symétriques pour la loi *.

2- Dans G = $\mathbb{R}_+^*$, on définit la loi * par :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Est-ce que (G, *) est un groupe ?

Non : la loi * est une LCI, associative, commutative mais d'élément neutre 0 ∉ G et aucun élément n'est symétrisable.

3- Montrer que $U_6 = \{z \in \mathbb{C} / z^6 = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$ pour la multiplication.

$1=1^6$ élément neutre pour la multiplication est dans U_6.
Soit (z ; z') un couple d'éléments de U_6. $(z(z')^{-1})^6 = z^6/(z')^6 = 1/1 = 1$ donc $z(z')^{-1} \in U_6$.

C.B. N° 6	Correction	2012-2013

1- Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les lois + et * par :
(x ; y) + (a ; b) = (x + a ; y + b) et (x ; y) * (a ; b) = (ax + by ; bx + ay).

i) Montrer que ($\mathbb{R}^2$, + , *) est un anneau commutatif.

Les lois + et * sont deux LCI, associatives et commutatives, d'éléments neutres respectifs 0 = (0 ; 0) et 1 = (1 ; 0). Le symétrique pour la loi + de (x, y) est (-x, -y). La loi * est distributive par rapport à la loi +.

ii) Est-ce un corps ? Justifier la réponse.

Non, ce n'est pas un corps car (x, x) et (x, -x) n'ont pas de symétriques pour la loi *.

2- Dans G = $\mathbb{R}$, on définit la loi * par :

$$x * y = \frac{x+y}{1+(xy)^2}$$

Est-ce que (G, *) est un groupe ?

Non : la loi * est une LCI commutative et d'élément neutre 0, tout élément x admet pour symétrique –x, mais la loi * n'est pas associative car
(-1*1)*2 = 2 et -1*(1*2) = -5/7.

3- Montrer que $U_8 = \left\{z \in \mathbb{C} / z^8 = 1\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}$ pour la multiplication.

$1=1^8$ élément neutre pour la multiplication est dans U_8.
Soit (z ; z') un couple d'éléments de U_8. $(z(z')^{-1})^8 = z^8/(z')^8 = 1/1 = 1$ donc $z(z')^{-1} \in U_8$.