C.B. N° 1 LOGIQUE – ENSEMBLES – APPLICATIONS **Correction**

1- Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

i) f s'annule sur $[0;+\infty[$.
$\exists x \in [0;+\infty[\,/\, f(x)=0$

ii) f n'est pas la fonction nulle.
$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \neq 0$

iii) f est de signe constant.
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) \geq 0$

2- Donner la négation des assertions suivantes :

i) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) > M$. (f n'est pas majorée)
$\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ (f est majorée)

ii) $\forall M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, \left(f(x+y) = M\right)$.
$\exists M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \,/\, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) \neq M$

iii) $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ $(a > 0\,, b \geqslant 0) \Longrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, na > b)$
$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, na \leq b)$

3- Donner la négation, puis la contraposée de l'implication suivante :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, h(x+y) = h(x) \times h(y)\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0\right)$$

Négation : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, h(x+y) = h(x) \times h(y)\right) \wedge \left(\exists x \in \mathbb{R} \,/\, h(x) < 0\right)$

Contraposée : $\left(\exists x \in \mathbb{R} \,/\, h(x) < 0\right) \Rightarrow \left(\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2, h(x+y) \neq h(x) \times h(y)\right)$

4- A, B et C désignent des sous-ensembles non vides d'un ensemble E. Montrer que :
$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = A \setminus (C \cup B)$

$$(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{C \cap \overline{B}}\right) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(\overline{C} \cup B\right) = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \underbrace{\left(A \cap \overline{B} \cap B\right)}_{\varnothing} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

D'où : $(A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap \left(\overline{B \cup C}\right) = A \setminus (B \cup C)$

5- Soit f : E $\longrightarrow$ F définie par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

a) On suppose $E = F = \mathbb{R}$.

i) f est-elle injective ? Justifier. $f(-1) = f(4) = 0$. f n'est pas injective.

ii) f est-elle surjective ? Justifier. $f(x) = 8 \Leftrightarrow -x^2 + 3x - 4 = 0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
f n'est pas surjective.

b) Déterminer E et F (non vides !) pour avoir f bijective. (Ne pas justifier)

$$E = \left[\frac{3}{2};+\infty\right[; \quad F = \left]-\infty;\frac{25}{4}\right]$$

C.B. N° 1	LOGIQUE – ENSEMBLES – APPLICATIONS	Correction

1- Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

i) f ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$.

$\forall x \in [0;+\infty[\ /\ f(x) \neq 0$

ii) f n'est pas une fonction constante.

$\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq f(y)$

iii) f n'est pas de signe constant.

$\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) < 0$

2- Donner la négation des assertions suivantes :

i) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M.$ (f est minorée)

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < M.$ (f n'est pas minorée)

ii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ /\ \left(f(x+y) = M\right).$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \left(f(x+y) \neq M\right).$

iii) $\forall (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\ (a > 0\,, b \geqslant 0) \Longrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N}\ /\ na > b)$

$\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, (a > 0, b \geq 0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, na \leq b)$

3- Donner la négation, puis la contraposée de l'implication suivante :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, h(x \times y) = h(x) + h(y)\right) \Rightarrow \left(\exists x \in \mathbb{R}, h(x) < 0\right)$$

Négation : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, h(x \times y) = h(x) + h(y)\right) \wedge \left(\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0\right)$

Contraposée : $\left(\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geq 0\right) \Rightarrow \left(\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2, h(x \times y) \neq h(x) + h(y)\right)$

4- A, B et C désignent des sous-ensembles non vides d'un ensemble E. Montrer que :
(B \ A) \ (C \ A) = B \ (A ∪ C)

$$(B \setminus A) \setminus (C \setminus A) = \left(B \cap \overline{A}\right) \cap \left(\overline{C \cap \overline{A}}\right) = \left(B \cap \overline{A}\right) \cap \left(\overline{C} \cup A\right) = \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \underbrace{\left(B \cap \overline{A} \cap A\right)}_{\varnothing} = B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$$

D'où : $(B \setminus A) \setminus (C \setminus A) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} = B \cap \overline{(A \cup C)} = B \setminus (A \cup C)$

5- Soit $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$.

a) On suppose E = F = $\mathbb{R}$.

i) f est-elle injective ? Justifier. $f(1) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$. f n'est pas injective.

ii) f est-elle surjective ? Justifier. $f(x) = 2 \Leftrightarrow -4x^2 + 3x - 1 = 0$ qui n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
f n'est pas surjective.

b) Déterminer E et F (non vides !) pour avoir f bijective. (Ne pas justifier)

$E = \left[\frac{3}{8};+\infty\right[;\quad F = \left]-\infty;\frac{25}{16}\right]$