C.B. N° 2 TRIGONOMETRIE – NOMBRES COMPLEXES Correction

1- Résoudre les équations suivantes :

(i) cos(2x) – sin(2x) = 1 $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x\in\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

(ii) $\sqrt{3}$ cos(x) + sin(x) = - $\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x\in\{\pi+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

(iii) cos(2x) + cos(4x) = 2cos(3x)

cos(2x) + cos(4x) = 2cos(3x) cos(-x) donc on doit résoudre : cos(3x) cos(x) = cos(3x)

$$\Leftrightarrow \cos(3x)(\cos(x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(3x)=0\\ ou\\ \cos(x)=1\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$$

2- Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

(i) $z_1=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

(ii) $z_2=\frac{-\sqrt{3}+5i}{\sqrt{3}+2i}=\frac{\left(-\sqrt{3}+5i\right)\left(\sqrt{3}-2i\right)}{3+4}=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(iii) $z_3=1-e^{i\theta}$ où $\theta\in[0;2\pi[$ $z_3=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}$

Ceci est bien une forme exponentielle car : $\theta\in[0;2\pi[\Rightarrow\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\geq 0$

3- Déterminer les racines carrées de Z = 5 – 4i $S=\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{41}}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{41}-5}{2}}\right)\right\}$

4- Dans le plan complexe, soient A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_C = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

a) Calculer $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) En déduire la nature du triangle ABC. Triangle équilatéral.

C.B. N° 2 TRIGONOMETRIE – NOMBRES COMPLEXES Correction

1- Résoudre les équations suivantes :

(i) cos(2x) + sin(2x) = - 1 $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

(ii) cos(x) + $\sqrt{3}$ sin(x) = -$\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

(iii) sin(3x) + sin(x) = 2sin(2x)

sin(3x) + sin(x) = 2 sin(2x) cos(x) donc on doit résoudre : sin(2x) cos(x) = sin(2x)

$\Leftrightarrow \sin(2x)(\cos(x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2x)=0\\ ou\\ \cos(x)=1\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

2- Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

(i) $z_1=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

(ii) $z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{3\sqrt{3}+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(3\sqrt{3}-i)}{27+1}=\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{2}{7}i=\frac{1}{\sqrt{7}}e^{i\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)}$

(iii) $z_3=e^{i\theta}-1$ où $\theta\in[0;2\pi[$ $z_3=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

Ceci est bien une forme exponentielle car : $\theta\in[0;2\pi[\Rightarrow\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\geq 0$

3- Déterminer les racines carrées de Z = -3 – 4i

$S=\{\pm(1-2i)\}$

4- Dans le plan complexe soient A, B et C d'affixes respectives $z_A=\frac{1}{2}$; $z_B=3+i$ et $z_C=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

a) Calculer $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$

b) En déduire la nature du triangle ABC. Triangle isocèle, rectangle en A.