C.B. N° 3 **-GENERALITES SUR LES FONCTIONS-** **Correction**
-FONCTIONS USUELLES-

1- Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude des fonctions suivantes à l'ensemble donné :

i) $f:\ x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$ sur $I=[1;+\infty[$

Le domaine de f est $]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$

f(-1 – x) = f(x) donc la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ admet la droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$ comme axe de symétrie. On étudie donc f sur $[1;+\infty[$, le reste s'obtenant par symétrie.

ii) $g:\ x \mapsto \cos(2x)+\sin(2x)$ sur $J=\left[-\dfrac{3\pi}{8};\dfrac{\pi}{8}\right]$

g est $\pi-$périodique. $g\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=g(x)$ donc la courbe de g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ admet la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{8}$ comme axe de symétrie.

On étudie g sur $\left[-\dfrac{3\pi}{8};\dfrac{\pi}{8}\right]$, on obtient la courbe de g sur $\left[\dfrac{\pi}{8};\dfrac{5\pi}{8}\right]$ par symétrie, puis sur son domaine par translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$

iii) $h:\ x \mapsto \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}$ sur $K=\left]-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$

h est $2\pi-$périodique. $h\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+h(x)=0$ donc la courbe de h dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ admet le point $I\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$ pour centre de symétrie.

On étudie h sur $\left]-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$, on obtient la courbe de h sur $\left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right[$ par symétrie par rapport à I, puis sur son domaine $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$ par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$

.

2- Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

i) $f:\ x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)$

$\sqrt{x^2+x-1}$ est défini pour $x\in\left]-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right[$.

Pour que f(x) soit défini, il faut de plus : $\sqrt{x^2+x-1}\le 1$, ce qui implique $x^2+x-2\le 0$, ce qui équivaut à $x\in$ [-2 ; 1].

Finalement, f est définie sur $\left[-2;\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};1\right]$.

ii) $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\frac{1+x}{1-x}$ est défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour que g(x) soit défini, il faut <u>de plus</u> : $\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \leq 1$, ce qui équivaut à $(1 + x)^2 \leq (1 - x)^2$, ce qui équivaut à $x \leq 0$.

Finalement, g est définie sur $\mathbb{R}^-$

3- Calculer :

i) $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$

ii) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$

iii) $\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{6}$

4- Simplifier g(x) = cos(Arctan(x))

$\operatorname{Arctan}(x) \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc cos(Arctan(x)) > 0, donc

$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arctan}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\operatorname{Arctan}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

C.B. N° 3 **-GENERALITES SUR LES FONCTIONS-** **Correction**
-FONCTIONS USUELLES-

1- Justifier que l'on peut réduire le domaine d'étude des fonctions suivantes à l'ensemble donné :

i) $f: x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ sur $I = \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

f est $2\pi-$périodique. $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(x) = 0$ donc la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ admet le point $I\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ pour centre de symétrie.

On étudie f sur $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, on obtient la courbe de f sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ par symétrie par rapport à I, puis sur son domaine par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

ii) $g: x \mapsto \sqrt{6 + x - x^2}$ sur $J = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$

Le domaine de g est $[-2; 3]$.

g(1 – x) = g(x) donc la courbe de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ admet la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ comme axe de symétrie. On étudie donc g sur $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$, le reste s'obtenant par symétrie.

iii) $h: x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\sin(x)}$ sur $K = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

h est $2\pi-$périodique ; impaire ; $h(\pi - x) = h(x)$ donc la courbe de h dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ admet la droite D d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.

On étudie h sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient la courbe de h sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ par symétrie par rapport à D, puis sur $]-\pi; 0[$ par symétrie par rapport à O, enfin sur son domaine $(\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\})$ par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2- Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

i) $f: x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{1 - x - x^2}\right)$

$\sqrt{1 - x - x^2}$ est défini pour $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Pour que f(x) soit défini, il faut de plus : $\sqrt{1 - x - x^2} \leq 1$, ce qui implique $x^2 + x \geq 0$, ce qui équivaut à $x \in]-\infty; -1] \cup [0 + \infty[$.

Finalement, f est définie sur $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

ii) $g : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}\right)$

$\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$ est défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour que g(x) soit défini, il faut de plus : $\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}\right| \leq 1$, ce qui équivaut à $(1 + x^2) \leq (1 - x)^2$, ce qui équivaut à $x \leq 0$.

Finalement, g est définie sur $\mathbb{R}^-$

3- Calculer :

i) $\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$

ii) $\mathrm{Arccos}\left(\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

iii) $\mathrm{Arcsin}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{-\pi}{4}$

4- Simplifier g(x) = tan(Arccos x) $= \dfrac{\sin(\mathrm{Arc}\cos x)}{\cos(\mathrm{Arc}\cos x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$