C.B. N° 7	- ESPACES VECTORIELS -	Correction

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0 \} = \text{Vect}\{(1 ; -1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 1)\}$

ii) $F = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0 \} = \text{Vect}\{(0 ; 1 ; 1)\}$

iii) $G = \{ (x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x + y + z)^2 = (2x + y - z)^2 \}$.
$X = (0 ; 0 ; 1) \in G$; $Y = (0 ; 1 ; 0) \in G$ et $X + Y \notin G$. G n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$u = (1 ; 0 ; 2)$, $v = (-1 ; 1 ; -1)$, $w = (-1 ; 3 ; 1)$, $x = (1 ; 0 ; 1)$, $y = (1 ; 1 ; 0)$

Soient $E = \text{Vect}\{u ; v ; w\}$, $F = \text{Vect}\{x\}$, $G = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et de G ?
$w = 2u + 3v$; u et v ne sont pas colinéaires. $\{u ; v\}$ est une base de E qui est de dimension 2.
x et y ne sont pas colinéaires. $\{x ; y\}$ est une base de G qui est de dimension 2.

b) Déterminer $E \cap F$. $x \notin E$, donc $E \cap F = \{0\}$.

c) E et F sont-ils supplémentaires ? oui. Justifier la réponse. $E \cap F = \{0\}$ et $\dim E + \dim F = 3$.

d) Déterminer une base de $E \cap G$. $E \cap G = \text{Vect}\{u - v\}$

e) Déterminer $E + G$. $E + G = \mathbb{R}^3$, car $\dim(E + G) = \dim E + \dim G - \dim(E \cap G) = 3$

f) Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$. $\text{Vect}\{u\}$ (par exemple…)

3. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$u = (-1 ; 1 ; 1 ; 0)$, $v = (2 ; 1 ; -1 ; 0)$, $w = (1 ; 0 ; 1 ; 2)$, $x = (0 ; 0 ; 1 ; 1)$ et $y = (1 ; 1 ; 0 ; 0)$.

Soient $E = \text{Vect}\{u ; v ; w\}$ et $F = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?
$\{u ; v ; w\}$ est une famille libre, c'est une base de E qui est de dimension 3.
x et y ne sont pas colinéaires. $\{x ; y\}$ est une base de F qui est de dimension 2.

b) Déterminer une base de $E + F$. $\{u ; v ; w ; x\}$ est une famille libre. $E + F = \mathbb{R}^4$

c) Déterminer une base de $E \cap F$. $E \cap F = \text{Vect}\{v - w\}$

d) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. $\text{Vect}\{u ; v\}$ (par exemple…)

C.B. N° 7	**- ESPACES VECTORIELS -**	**Correction**

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$ - espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - z = 0\} = \text{Vect}\{(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0)\}$

ii) $F = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x - y + z)^2 - (x + 2y - z)^2 = 0\}$
$X = (1 ; 0 ; 0) \in E$; $Y = (0 ; 0 ; 1) \in E$ et $X + Y \notin E$. E n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

iii) $G = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } x + 2y - 2z = 0\} = \text{Vect}\{(0 ; 1 ; 1)\}$

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$u = (1 ; 0 ; 2)$, $v = (1 ; 3 ; 2)$, $w = (1 ; 1 ; 2)$, $x = (0 ; 1 ; 1)$, $y = (1 ; 1 ; 0)$

Soient $E = \text{Vect}\{u ; v ; w\}$, $F = \text{Vect}\{x\}$, $G = \text{Vect}\{x ; y\}$.

a) Quelles sont les dimensions de E et de G ?
$v = 3w - 2u$. u et v ne sont pas colinéaires. $\{u ; v\}$ est une base de E qui est de dimension 2.
x et y ne sont pas colinéaires. $\{x ; y\}$ est une base de G qui est de dimension 2.

b) Déterminer $E \cap F$. $x \notin E$, donc $E \cap F = \{0\}$.

c) E et F sont-ils supplémentaires ? Justifier la réponse. $E \cap F = \{0\}$ et $\dim E + \dim F = 3$

d) Déterminer une base de $E \cap G$. $E \cap G = \text{Vect}\{v\}$

e) Déterminer $E + G$. $E + G = \mathbb{R}^3$, car $\dim(E + G) = \dim E + \dim G - \dim(E \cap G) = 3$

f) Déterminer un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^3$. $\text{Vect}\{u\}$ (par exemple…)

3. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs suivants :

$u = (-1 ; 1 ; 0 ; 2)$, $v = (2 ; 0 ; -1 ; 0)$, $w = (0 ; 0 ; 1 ; 2)$, $x = (1 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $y = (0 ; 1 ; 0 ; 1)$.

Soient $E = \text{Vect}\{u ; v ; w\}$ et $F = \text{Vect}\{x ; y\}$.

«

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?
$\{u ; v ; w\}$ est une famille libre, c'est une base de E qui est de dimension 3.
x et y ne sont pas colinéaires. $\{x ; y\}$ est une base de F qui est de dimension 2.

b) Déterminer une base de E + F. $\{u ; v ; w ; x\}$ est une famille libre. $E + F = \mathbb{R}^4$

c) Déterminer une base de $E \cap F$. $E \cap F = \text{Vect}\{-2x + 3y\}$

d) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. $\text{Vect}\{u ; v\}$ (par exemple…)