C.B. N° 8	- SERIES NUMERIQUES -	15/05/14

1. Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{|\sin n|}{n^2}$.

ii) $v_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$.

iii) $w_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

2. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes positifs, convergente.

Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

ii) $v_n = \sin^2 a_n$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2+k} - \ln n$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 1}{n!}$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

b) Montrer que $\mathcal{B}$ = {1 ; X ; X(X – 1)} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées de P = $3X^2$ + 2X – 1 dans cette base.

c) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, en sachant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

5. Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}}$. On se ramènera à un télescopage.

C.B. N° 8	- SERIES NUMERIQUES -	15/05/14

1. Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \cos^2 n}$.

ii) $v_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

iii) $w_n = \cos n - \cos(n-1)$.

2. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes positifs, convergente.

Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n}$

ii) $v_n = a_n^2$

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n = \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+k}$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4. On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 2}{n!}$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

b) Montrer que $\mathcal{B} = \{1 ; X ; X(X-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées de $P = 2X^2 - X + 2$ dans cette base.

c) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, en sachant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

5. Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right)$. On se ramènera à un télescopage.