| C.B. N° 8 | - SERIES NUMERIQUES - | Correction |
|---|---|---|

**1.** Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{|\sin n|}{n^2}$.

$\sum u_n$ est une série à termes positifs, tels que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ ; $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, par comparaison, $\sum u_n$ est convergente.

ii) $v_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$ .

On a : $v_n = e^{\frac{\ln(n)}{n^2}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ donc la série est à termes positifs à partir d'un certain rang.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$ (par croissances comparées), donc le critère de Riemann donne $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ convergente. Par comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

iii) $w_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ .

$w_n = a_n - a_{n-1}$ où $a_n = \sqrt{n}$ . $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, donc la série télescopique $\sum\limits_{n\geq1} w_n = \sum\limits_{n\geq1}(a_n - a_{n-1})$ diverge.

**2.** Soit $\sum\limits_{n\geq0} a_n$ une série à termes positifs, convergente.

La série $\sum a_n$ étant convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n} \underset{+\infty}{\sim} a_n$ .

$\sum u_n$ est une série à termes positifs ; par comparaison , $\sum u_n$ converge.

ii) $v_n = \sin^2 a_n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ : $v_n \underset{+\infty}{\sim} a_n^2$ et $a_n^2 = o_{+\infty}(a_n)$, et donc $v_n = o_{+\infty}(a_n)$.

$\sum v_n$ est une série à termes positifs ; par comparaison , $\sum v_n$ converge.

**3.** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2+k} - \ln n$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3+n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{3+n} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-5}{2n^2}$.

La série de terme général $v_n$ est donc de signe constant à partir d'un certain rang.

De plus, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \dfrac{-5}{2n^2}$ converge (par linéarité). Par comparaison , $\sum v_n$ converge.

Enfin, la série télescopique $\sum\limits_{n\geq1} v_n = \sum\limits_{n\geq1}(u_{n+1} - u_n)$ convergeant, on en déduit que $(u_n)$ converge.

**4.** On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n^2 + 2n - 1}{n!}$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série à termes positifs pour $n > 0$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left( \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 0$.

Le critère de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

b) Montrer que $\mathcal{B}$ = {1 ; X ; X(X – 1)} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées de P = $3X^2$ + 2X – 1 dans cette base.

$\mathcal{B}$ est une famille de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ à degrés échelonnés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

De plus, P = $3X^2$ + 2X – 1 = -1 + 5X + 3X(X – 1). Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc (-1 ; 5 ; 3).

c) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, en sachant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

$$\forall n \geq 2, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{3k^2 + 2k - 1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{3k(k-1) + 5k - 1}{n!} = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + 5\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$$

$$3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + 5\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ainsi, après changements d'indices et passage à la limite : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = 3e + 5e - e = 7e$.

**5.** Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}}$. On se ramènera à un télescopage.

En multipliant par l'expression conjuguée, on a :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+2} + (n+2)\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+2}}.$$

Ainsi, $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k+2}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}}$

(par télescopage). $\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, on en déduit que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

**1.** Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + \cos^2 n}$.

$\sum u_n$ est une série à termes positifs, tels que $0 \le u_n \le \dfrac{1}{n^2}$ ; $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, par comparaison, $\sum u_n$ est convergente.

ii) $v_n = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

On a : $v_n = e^{n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{=} e^{n\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^2}{2^n}$ donc la série est à termes positifs à partir d'un certain rang.

De plus, $\dfrac{1}{2^n}$ est le terme général d'une série géométrique convergente, donc par linéarité, $\dfrac{e^2}{2^n}$ également. Par comparaison, $\sum v_n$ est convergente.

iii) $w_n = \cos n - \cos(n-1)$.

$w_n = a_n - a_{n-1}$ où $a_n = \cos n$. $(a_n)$ n'a pas de limite en l'infini, donc la série télescopique $\sum\limits_{n\ge1} w_n = \sum\limits_{n\ge1}(a_n - a_{n-1})$ diverge.

**2.** Soit $\sum\limits_{n\ge0} a_n$ une série à termes positifs, convergente.

La série $\sum a_n$ étant convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Déterminer la nature des séries de terme général :

i) $u_n = \dfrac{1-\cos a_n}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}a_n^2}{a_n}$. $\sum u_n$ est une série à termes positifs, et comme $\sum a_n$ converge, il en est de même de $\sum \dfrac{1}{2} a_n$. Par comparaison de $\sum u_n$.

ii) $v_n = a_n^2$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, $a_n^2 = o_{+\infty}(a_n)$, et donc $v_n = o_{+\infty}(a_n)$.

$\sum v_n$ est une série à termes positifs ; par comparaison, $\sum v_n$ converge.

**3.** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_n = \ln(2n) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+k}$

En étudiant la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $v_n = u_{n+1} - u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2+n} \underset{+\infty}{=} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right) - \dfrac{1}{2+n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2n^2}$.

La série de terme général $v_n$ est donc de signe constant à partir d'un certain rang.

De plus, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \dfrac{3}{2n^2}$ converge (par linéarité). Par comparaison, $\sum v_n$ converge.

Enfin, la série télescopique $\sum\limits_{n\ge1} v_n = \sum\limits_{n\ge1}(u_{n+1} - u_n)$ convergeant, on en déduit que $(u_n)$ converge

**4.** On considère pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 2}{n!}$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. . $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série à termes positifs .

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 0$. Le critère de d'Alembert permet de conclure à la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ .

b) Montrer que $\mathcal{B}$ = {1 ; X ; X(X – 1)} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, et donner les coordonnées de P = $2X^2$ – X + 2 dans cette base.

$\mathcal{B}$ est une famille de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ à degrés échelonnés, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, P = $2X^2$ – X + 2 = 2 + X + 2X(X – 1). Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc (2 ; 1 ; 2).

c) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ , en sachant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$ .

$$\forall n \geq 2, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k^2 - k + 2}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k-1) + k + 2}{n!} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =$$

$$2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} .$$

Ainsi, après changements d'indices et passage à la limite : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2e + e + 2e = 5e$ .

**5.** Existence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right)$. On se ramènera à un télescopage.

On a : $\forall n \geq 2,\ u_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n(n+1)}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}\right) = \ln(n+2) - \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n-1)$.

Ainsi, $\forall n \geq 2$ on a: $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+2) - \ln(k+1)\right) - \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k) - \ln(k-1)\right)$

$= \ln(n+2) - \ln 3 - \ln n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right) - \ln 3$ (par télescopage).

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln\dfrac{1}{3}$, on en déduit que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge, et $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \ln\dfrac{1}{3}$.