C.B. N° 10	ESPACES VECTORIELS	CORRECTION

1- Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - z = 0\}$ = Vect{(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 0)}

ii) $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = z \;\text{ ou }\; x = y\}$;

u = (1 ; 0 ; 1)$\in$F, v = (1 ; 1 ; 0)$\in$F, mais u + v = (2 ; 1 ; 1) $\notin$ F ; F n'est pas un ev.

iii) $G = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x + y = 0 \;\text{ et }\; x + 2y = z\}$ = Vect{(1 ; -2 ; -3 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)}

iv) $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P(0) = 1\}$; P = 0 $\notin$ H ; H n'est pas un ev.

2- Déterminer un supplémentaire des espaces vectoriels suivants :

i) $A = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ = Vect{(1 ; -1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 1)}

On vérifie que {(1 ; -1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 0 ; 1)} est une famille libre.

$\mathbb{R}^3 = A \oplus \text{Vect}\{(0;0;1)\}$.

ii) $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P'(0) = 0\}$ = Vect{X^0 ; X^2} donc $\mathbb{R}_2[X] = B \oplus \text{Vect}\{X\}$.

C.B. N° 10	**ESPACES VECTORIELS**	**CORRECTION**

1- Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x = 0\}$ = Vect{(0 ; 1 ; 0 ; 0) ; (0 ; 0 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 0 ; 1)}

ii) $F = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x - t = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$ = Vect{(1 ; 0 ; -1 ; 2) ; (0 ;1 ; -1 ; 0)}

iii) $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P(0) = 0\}$ = Vect{X ; X^2}

iv) $H = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 = y^2\}$;

u = (1 ; 1 ; 0)$\in$H, v = (1 ; -1 ; 0) $\in$H , mais u + v = (2 ; 0 ; 0)$\notin$H ; H n'est pas un ev

2- Déterminer un supplémentaire des espaces vectoriels suivants :

i) $A = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y - z = 0\}$ = Vect{(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 2)}

On vérifie que {(1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 2) ; (0 ; 0 ; 1)} est une famille libre.

$\mathbb{R}^3 = H \oplus \text{Vect}\{(0;0;1)\}$.

ii) $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \,/\, P''(0) = 0\}$ = Vect{X^0 ; X} donc $\mathbb{R}_2[X] = T \oplus \text{Vect}\{X^2\}$