C.B. N° 1 LOGIQUE – ENSEMBLES – APPLICATIONS CORRECTION

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite constante : $\exists(p;q)\in\mathbb{N}^2, u_p \neq u_q$

ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang : $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N)\Rightarrow(u_n\geq 0)$

2- f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante : $(\forall y\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R} / f(x)=y)$

Cette assertion signifie que f est surjective.
Sa négation est : $(\exists y\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R} / f(x)\neq y)$

3- Donner la contraposée puis la négation de l'implication suivante : $(|a-b|<r)\Rightarrow(|f(a)-f(b)|\leq\varepsilon)$

Contraposée : $(|f(a)-f(b)|>\varepsilon)\Rightarrow(|a-b|\geq r)$;

Négation : $(|a-b|<r)\wedge(|f(a)-f(b)|>\varepsilon)$

4- Soient A, B et C des ensembles. Montrer que $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

$A\setminus(B\cap C)=A\cap\overline{(B\cap C)}=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

5- **Question de cours :** Soient $f\in F^E$ et $g\in G^F$. Montrer que : (g o f injective) $\Rightarrow$ (f injective).

$(f(a)=f(b))\Rightarrow(g\circ f(a)=g\circ f(b))\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{g\circ f\\ \text{injective}}}(a=b)$ donc f injective.

La réciproque est-elle vraie ? non ;

Justifier. En prenant $f=Id_{\mathbb{R}}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec $g(x)=x^2$, on a f injective et $g\circ f=g$ non injective.

C.B. N° 1 LOGIQUE – ENSEMBLES – APPLICATIONS CORRECTION

1- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite croissante : $\exists(p;q)\in\mathbb{N}^2,(p<q)\wedge(u_p>u_q)$

iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},(|u_n|\leq M)$

2- f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Donner la signification puis la négation de l'assertion suivante :

$\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,(f(x)=f(y))\Rightarrow(x=y)\right)$

Cette assertion signifie que f est injective.

Sa négation est : $\left(\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2,(x\neq y)\wedge(f(x)=f(y))\right)$

3- Donner la contraposée puis la négation de l'implication suivante : $(n\geq n_0)\Rightarrow(|u_n|\leq\varepsilon)$

Contraposée : $(|u_n|>\varepsilon)\Rightarrow(n<n_0)$

Négation : $(n\geq n_0)\wedge(|u_n|>\varepsilon)$

4- Soient A, B et C des ensembles. Montrer que $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

$A\setminus(B\cup C)=A\cap\overline{(B\cup C)}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$

5- **Question de cours :** Soient $f\in F^E$ et $g\in G^F$. Montrer que : (g o f surjective) $\Rightarrow$ (g surjective).

Soit $y\in G$, g o f est surjective donc : $\exists x\in E, g\circ f(x)=y$ donc $\exists a\in F, g(a)=y$ (a = f(x)).

Donc g est surjective.

La réciproque est-elle vraie ? Non

Justifier. En prenant $g=Id_{\mathbb{R}}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$, on a g surjective et $g\circ f = f$ non surjective.