C.B. N° 2	LOGIQUE – RAISONNEMENT GENERALITES SUR LES FONCTIONS	CORRECTION

1- Traduire en langage formel :

i) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists N \in \mathbb{Z}, \ n < N$

ii) La fonction f ne présente pas de minimum. (f est définie sur $\mathbb{R}$)

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) < f(a)$

iii) La fonction f est majorée. (f est définie sur $\mathbb{R}$)

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) \leq M$

2- Soient P et Q deux propositions. Démontrer que : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\rceil P$	$\rceil Q$	$\rceil Q \Rightarrow \rceil P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

3- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geq 1 + n$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n : $2^n \geq 1 + n$.
Pour $n = 1$: $2^n = 2$ et $1 + n = 2$ donc P_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n vraie. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(1+n)$ par hypothèse de récurrence.
Or $n \geq 1$, donc $2n + 2 \geq (1+n) + 1$. P_{n+1} est donc vraie.
La propriété P_n est vraie pour $n = 1$, et héréditaire $\forall n \in \mathbb{N}^*$; par principe de récurrence, elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4- Justifier que le graphe de la fonction $f : x \mapsto \ln\big((x+1)(-x+2)\big)$ possède un axe de symétrie.

La fonction f est définie sur $]-1;2[$, intervalle centré en $\frac{1}{2}$.

$\forall x \in]-1;2[: f\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) = \ln\left(\left(\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) + 1\right)\left(-\left(2 \times \frac{1}{2} - x\right) + 2\right)\right) = \ln\big((2-x)(1+x)\big) = f(x)$ La courbe de la fonction f admet donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ pour axe de symétrie.

5- Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}\right)$

$D = \left]-\infty; -\sqrt{2}\right[\cup]3; +\infty[$

C.B. N° 2	LOGIQUE – RAISONNEMENT GENERALITES SUR LES FONCTIONS	CORRECTION

1- Traduire en langage formel :

i) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

$\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$

ii) La fonction f présente un minimum. (f est définie sur $\mathbb{R}$)

$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leq f(x)$

iii) La fonction f n'est pas majorée. (f est définie sur $\mathbb{R}$)

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \ f(x) > M$

2- Soient P et Q deux propositions. Démontrer que : $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \Leftrightarrow (\urcorner \mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\urcorner P$	$\urcorner P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

3- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}_n : \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Pour $n = 1$: $\dfrac{1}{n!} = 1$ et $\dfrac{1}{2^{n-1}} = 1$ donc P_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose P_n vraie. Alors $\dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!\ (n+1)} \leq \dfrac{1}{2^{n-1} \times (n+1)}$ par hypothèse de récurrence. Or $n \geq 1$, donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$ d'où $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1} \times 2} = \dfrac{1}{2^n}$, donc P_{n+1} est vraie.

La propriété P_n est vraie pour n = 1, et héréditaire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, par principe de récurrence, elle est donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4- Justifier que le graphe de la fonction $f :\ x \mapsto \ln\left((-x+1)(x+2)\right)$ possède un axe de symétrie.

La fonction f est définie sur $]-2;1[$, intervalle centré en $-\dfrac{1}{2}$.

$$\forall x \in]-2;1[:\ f\left(2 \times \frac{-1}{2} - x\right) = \ln\left(\left(-\left(2 \times \frac{-1}{2} - x\right) + 1\right)\left(\left(2 \times \frac{-1}{2} - x\right) + 2\right)\right) = \ln\left((x+2)(1-x)\right) = f(x).$$

La courbe de la fonction f admet donc la droite d'équation $x = \dfrac{-1}{2}$ pour axe de symétrie.

5- Déterminer le domaine de définition de la fonction $f :\ x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 - 2}{\ln|x|}}$

$D = \left]-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup]-1;0[\cup]0;1[\cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right[$