C.B. N° 3 **NOMBRES COMPLEXES** **CORRECTION**

FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

1- Déterminer les racines 4-ièmes de $\dfrac{16\sqrt{2}}{1-i}=16\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad S=\left\{2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{16}};2\mathrm{e}^{i\frac{9\pi}{16}};2\mathrm{e}^{-i\frac{15\pi}{16}};2\mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{16}}\right\}$

2- Résoudre l'équation : $z^2-(5-14i)\,z-(24+10i)=0$

$\Delta=(5-10i)^2$ d'où $S=\{-2i\,;\,5-12i\}$.

3- Déterminer, si elles existent, les limites en $+\infty$ de :

i) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x\ln(x)}=\dfrac{x}{\ln(x)}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ d'où: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ii) $g(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\underbrace{=}_{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$

4- Etude de la fonction *f* définie par : $f(x)=\mathrm{e}^{x\ln|x+1|}$

a) Déterminer le domaine de définition de *f*. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b) Déterminer les variations de *f*. *f* est dérivable sur son domaine.

$\forall x\in D_f$: $f'(x)=\mathrm{e}^{x\ln|x+1|}\left(\ln|1+x|+\dfrac{x}{1+x}\right)$ est du signe de $v(x)=\ln|1+x|+\dfrac{x}{1+x}$.

La fonction *v* est dérivable sur son domaine et : $\forall x\in D_f$: $v'(x)=\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.

Ainsi, *v* est décroissante sur $]-\infty;-2]$ puis croissante sur $[-2;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

v(-2) > 0, on en déduit que *v* est positive sur $]-\infty;-1[$ et par suite que *f* y est croissante.

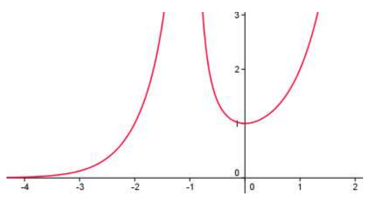
v(0) = 0, on en déduit que *v* est négative sur $]-1;0[$ et positive sur $]0;+\infty[$ et par suite que *f* est décroissante sur $]-1;0[$ et croissante sur $]0;+\infty[$.

c) Déterminer les limites de *f*(*x*) aux bornes de son domaine de définition

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

d) Dresser le tableau des variations de *f*.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



C.B. N° 3 **NOMBRES COMPLEXES** **CORRECTION**

FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

1- Déterminer les racines 4-ièmes de $\dfrac{8}{1-\sqrt{3}\,i}=4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad S=\left\{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}};\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}};\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{11\pi}{12}};\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{12}}\right\}$

2- Résoudre l'équation : $\quad z^2 + (3 - 6i)\,z - 2\,(4 + 3i) = 0$

$\Delta=(3-2i)^2$ d'où $S = \{2i\ ;\ -3 + 4i\}$.

3- Déterminer, si elles existent, les limites en $+\infty$ de :

i) $\quad f(x)=\dfrac{x+1}{x^2\ln(x)}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x\ln(x)}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ii) $\quad g(x)=x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\underbrace{=}_{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^u-1}{u}=1$

4- Etude de la fonction f définie par : $\quad f(x)=\mathrm{e}^{x\ln|1-x|}$

a) Déterminer le domaine de définition de f. $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Déterminer les variations de f. $\quad f$ est dérivable sur son domaine.

$\forall x\in D_f\ :\quad f'(x)=\mathrm{e}^{x\ln|x-1|}\left(\ln|x-1|+\dfrac{x}{x-1}\right)$ est du signe de $v(x)=\ln|x-1|+\dfrac{x}{x-1}$.

La fonction v est dérivable sur son domaine et : $\forall x\in D_f : v'(x)=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$.

Ainsi, v est décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;2[$ puis croissante sur $]2;+\infty[$.

$v(2) > 0$, on en déduit que v est positive sur $]1;+\infty[$ et par suite que f y est croissante.

$v(0) = 0$, on en déduit que v est positive sur $]-\infty;0[$ et négative sur $]0;1[$ et et par suite que f est croissante sur $]-\infty;0[$ et décroissante sur $]0;1[$.

c) Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

d) Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0 \;\|\|\; 0$	$\nearrow$	$+\infty$