1- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$u_0=-1,\ v_0=2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1}=4u_n-2v_n \\ v_{n+1}=3v_n-3u_n \end{cases}.$$

a) Montrer que $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}+v_{n+1}=4u_n-2v_n+3v_n-3u_n=u_n+v_n$,

La suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n+v_n=u_0+v_0=1$.

b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

D'après la question précédente : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=1-u_n$, donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=4u_n-2(1-u_n)=-2+6u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.

c) En déduire u_n et v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Soit l tel que $l = -2 + 6l$, c'est-à-dire $l = \frac{2}{5}$.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n-l=-2+6u_n-(-2+6l)=6(u_n-l)$, ainsi la suite $(u_n-l)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $r = 6$ et de terme initial : $u_0-l=\frac{-7}{5}$.

On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{2}{5}-\frac{7}{5}\times 6^n$, et par suite : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=1-u_n=\frac{3}{5}+\frac{7}{5}\times 6^n$.

d) Expliciter $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{5}6^n\right)=\frac{2}{5}(n+1)-\frac{7}{5}\times\frac{1-6^{n+1}}{1-6}=\frac{2}{5}(n+1)-\frac{7}{25}\left(6^{n+1}-1\right).$$

2- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$u_0=-1,\ u_1=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=-4(u_{n+1}+u_n).$$

Expliciter u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 + 4r + 4 = 0$, qui admet -2 pour solution double.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\lambda n+\mu)\times(-2)^n$, avec λ et μ déterminées par les valeurs de u_0 et u_1 :

$$\begin{cases} \mu=-1 \\ -2(\lambda+\mu)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-2 \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases}$$; on a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\left(\frac{1}{2}n-1\right)\times(-2)^n$.

1- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par :

$$u_0=1,\quad v_0=2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n \\ v_{n+1}=2u_n+3v_n \end{cases}.$$

a) Montrer que $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-v_{n+1}=3u_n+2v_n-2u_n-3v_n=u_n-v_n$,

La suite $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante, et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n-v_n=u_0-v_0=-1$.

b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

D'après la question précédente : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=1+u_n$, donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=3u_n+2(1+u_n)=2+5u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.

c) En déduire u_n et v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Soit l tel que $l = 2 + 5l$, c'est-à-dire $l = \dfrac{-1}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_n-l=2+5u_n-(2+5l)=5(u_n-l)$, ainsi la suite $(u_n-l)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $r = 5$

et de terme initial : $u_0-l=\dfrac{3}{2}$.

On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{2}\times 5^n$, et par suite : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=1+u_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\times 5^n$.

d) Expliciter $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}2^n\right)=\frac{-1}{2}(n+1)+\frac{3}{2}\times\frac{1-5^{n+1}}{1-5}=\frac{-1}{2}(n+1)+\frac{3}{8}\left(5^{n+1}-1\right).$$

2- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$u_0=-2, u_1=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_n-u_{n+1}.$$

Expliciter u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 + r - 2 = 0$, qui admet -2 et 1 pour solutions.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda+\mu(-2)^n$, avec λ et μ déterminées par les valeurs de u_0 et u_1 :

$\begin{cases} \lambda+\mu=-2 \\ \lambda-2\mu=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$; on a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=-1-(-2)^n$.