C.B. N° 8	DERIVATION	CORRECTION

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{\operatorname{Arcsin}^2 x - \frac{\pi^2}{16}}{2x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{\operatorname{Arcsin}^2 x - \pi^2/16}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\operatorname{Arcsin} x - \pi/4}{x-1/\sqrt{2}} \times \dfrac{\operatorname{Arcsin} x + \pi/4}{x\sqrt{2}+1}$.

La fonction Arcsin étant dérivable en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{\operatorname{Arcsin} x - \pi/4}{x-1/\sqrt{2}} = \operatorname{Arcsin}'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$, d'où par opérations algébriques sur les limites : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{\operatorname{Arcsin}^2 x - \pi^2/16}{2x^2-1} = \dfrac{\pi}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^x - 5^5}{x-5}$;

$f : x \mapsto x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée : $x \mapsto (\ln x + 1)\mathrm{e}^{x\ln x}$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^x - 5^5}{x-5} = f'(5) = (1+\ln(5))5^5$.

2- Après avoir justifié l'existence, déterminer la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $f : x \mapsto (-x^2+1)\mathrm{e}^{3x}$.

Soient $g : x \mapsto -x^2+1$ et $h : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$. g et h sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc par produit, il en est de même de f.

D'après la formule de Leibniz, on a pour tout entier n : $f^{(n)} = (gh)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$.

On a : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 3,\ g^{(k)} = 0$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N}, h^{(j)}(x) = 3^j \mathrm{e}^{3x}$; d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = 3^{n-2}\mathrm{e}^{3x}\left(9(-x^2+1) - 6nx - n(n-1)\right)$.

3- a) Montrer que, pour $0 < a < b$, il existe $c \in]a;b[$ vérifiant : $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{c}}$.

La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[a ; b]$, et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur]a ; b[de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Le théorème des accroissements finis donne immédiatement le résultat.

b) En déduire que $\dfrac{b-a}{2\sqrt{b}} \leq \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \dfrac{b-a}{2\sqrt{a}}$,p puis que $\left|\sqrt{10001} - 100\right| \leq 5\times 10^{-3}$.

$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est une fonction décroissante sur $[a ; b]$; comme $a < c < b$ on en déduit que :

$\dfrac{1}{2\sqrt{b}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{c}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ puis, en multipliant par $b - a > 0$, on obtient le premier encadrement.

Comme $\dfrac{b-a}{2\sqrt{b}} \geq 0$, on a : $\left|\sqrt{b} - \sqrt{a}\right| \leq \dfrac{b-a}{2\sqrt{a}}$; avec a = 10 001 et b = 10 000 on obtient le second encadrement.

C.B. N° 8	DERIVATION	CORRECTION

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$ avec $a\neq 0$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}\times\dfrac{\sin x+\sin a}{x+a}$

La fonction sin étant dérivable en *a*, on a : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\sin'(a)=\cos(a)$, d'où par opérations algébriques sur les limites : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}=\dfrac{\cos a\sin a}{a}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5^x-x^5}{x-5}$

$f:x\mapsto 5^x-x^5=\mathrm{e}^{x\ln(5)}-x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $x\mapsto\ln(5)\times 5^x-5x^4$.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5^x-x^5}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)=(-1+\ln(5))5^5$.

2- Après avoir justifié l'existence, déterminer la dérivée d'ordre $n\in\mathbb{N}$ de $f:x\mapsto(3x^2-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Soient $g:x\mapsto 3x^2-x$ et $h:x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$. g et h sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc par produit, il en est de même de *f*.

D'après la formule de Leibniz, on a pour tout entier *n* : $f^{(n)}=(gh)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}g^{(k)}h^{(n-k)}$.

Comme, $\forall k\in\mathbb{N},k\geq 3,\ g^{(k)}=0$, et $\forall x\in\mathbb{R},\forall j\in\mathbb{N},h^{(j)}(x)=(-1)^j\mathrm{e}^{-x}$, on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{-x}\left((3x^2-x)-n(6x-1)+3n(n-1)\right)$

3- a) Montrer que, pour $0\leq a<b$, il existe $c\in\,]a;b[$ vérifiant : $\mathrm{Arc}\tan b-\mathrm{Arc}\tan a=\dfrac{b-a}{1+c^2}$.

La fonction Arctan est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[a\,;\,b]$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur]a ; b[de dérivée $x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$. Le théorème des accroissements finis donne immédiatement le résultat.

b) En déduire que $\dfrac{b-a}{1+b^2}\leq\mathrm{Arc}\tan b-\mathrm{Arc}\tan a\leq\dfrac{b-a}{1+a^2}$, puis que $\dfrac{3}{25}\leq\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{4}{3}\right)-\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{1}{6}$.

$x\mapsto\dfrac{1}{1+x^2}$ est une fonction décroissante sur $[a\,;\,b]$;comme $a<c<b$ on en déduit que :

$\dfrac{1}{1+b^2}\leq\dfrac{1}{1+c^2}\leq\dfrac{1}{1+a^2}$ puis, en multipliant par $b-a>0$, on obtient le premier encadrement.

En posant $b=\dfrac{4}{3}$ et $a=1$, on obtient le second encadrement.