1- Pour les fonctions suivantes, montrer que l'on peut effectuer un prolongement par continuité en a, que la fonction ainsi prolongée est dérivable en a, et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction prolongée au point d'abscisse a, ainsi que la position relative de la tangente et de la courbe au voisinage de ce point.

i) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)\left(1-\cos(x)\right)}{x^2}$ en $a = 0$. $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{8} + o_0\left(x^3\right)$

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 0$, la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 (et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$) ;

La courbe de la fonction prolongée admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{x}{2}$; au voisinage du point O, la courbe est au-dessus de la tangente à gauche , et en-dessous à droite.

ii) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + x - 1}{1 - x^2}$ en $a = 1$. $g(x) = -1 + \dfrac{3}{4}(x-1) - \dfrac{13}{24}(x-1)^2 + o_1\left((x-1)^2\right)$

donc la fonction g est prolongeable par continuité en 1 avec $g(1) = -1$, la fonction ainsi prolongée est dérivable en 1 (et $g'(1) = \dfrac{3}{4}$) ;

La courbe de la fonction prolongée admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4}$ qui se situe au-dessus de la courbe au voisinage du point.

2- Montrer que les courbes des fonctions suivantes admettent une asymptote en $\pm\infty$, et donner au voisinage des infinis la position relative de la courbe et de l'asymptote.

i) $f : x \mapsto x\operatorname{Arctan}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; $f(x) = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4x} + o_\infty\left(\dfrac{1}{x}\right)$

La courbe de f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2}$

En $+\infty$ la courbe est en-dessous de l'asymptote ;
en $-\infty$ la courbe est au-dessus de l'asymptote.

ii) $g : x \mapsto x\left(\dfrac{1+x}{x-1}\right)^x$; $g(x) = e^2 x + \dfrac{2e^2}{3x} + o_\infty\left(\dfrac{1}{x}\right)$

La courbe de g admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = e^2 x$
En $+\infty$ la courbe est au-dessus de l'asymptote ;
en $-\infty$ la courbe est en-dessous de l'asymptote.

1- Pour les fonctions suivantes, montrer que l'on peut effectuer un prolongement par continuité en a, que la fonction ainsi prolongée est dérivable en a, et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction prolongée au point d'abscisse a, ainsi que la position relative de la tangente et de la courbe au voisinage de ce point.

i) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\ln(1-x)}$ en $a = 0$. $f(x) = -1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + o_0(x^2)$

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = -1$, la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 (et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$) ;

La courbe de la fonction prolongée admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = -1 + \dfrac{x}{2}$; au voisinage du point, la courbe est au-dessus de la tangente.

ii) $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+\cos(\pi x)}}{1-x}$ en $a = 1$. $g(x) = -\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} + \dfrac{\pi^3}{24\sqrt{2}}(x-1)^2 + o_1\left((x-1)^2\right)$

donc la fonction g est prolongeable par continuité en 1 avec $g(1) = -\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, la fonction ainsi prolongée est dérivable en 1 (et $g'(1) = 0$) ;

La courbe de la fonction prolongée admet au point d'abscisse 1 une tangente (horizontale) d'équation $y = -\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ qui se situe en-dessous de la courbe au voisinage du point.

2- Montrer que les courbes des fonctions suivantes admettent des asymptotes en $\pm\infty$, et donner au voisinage des infinis la position relative de la courbe et de l'asymptote.

i) $f : x \mapsto x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$; $f(x) = \mathrm{e}x - \dfrac{\mathrm{e}}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}}{24x} + o_\infty\left(\dfrac{1}{x}\right)$

La courbe de f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = \mathrm{e}x - \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

En $+\infty$ la courbe est au-dessus de l'asymptote ;
en $-\infty$ la courbe est en-dessous de l'asymptote.

iii) $g : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$; $g(x) = x - 1 + \dfrac{5}{6x} + o_\infty\left(\dfrac{1}{x}\right)$

La courbe de g admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = x - 1$

En $+\infty$ la courbe est au-dessus de l'asymptote ;
en $-\infty$ la courbe est en-dessous de l'asymptote.