C.B. N° 11	ESPACES VECTORIELS	Correction

1- Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x+2=0\}$ Non : $(0;0;0)\notin E$

ii) $F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x^2-z^2=0\}$ Non :

$(1;0;1)\in F$, $(1;0;-1)\in F$ et $(1;0;1)+(1;0;-1)=(2;0;0)\notin F$

iii) $G=\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4 / x=0 \text{ et } y=0\}$ $=\text{Vect}\{(0;0;1;0);(0;0;0;1)\}$

iv) $H=\{P\in\mathbb{R}_3[X] / P(1)=P'(1)=0\}=\text{Vect}\{(X-1)^2;X(X-1)^2\}$

2- Déterminer un supplémentaire des espaces vectoriels suivants :

i) $A=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}=\text{Vect}\{(1;-1;0),(1;0;-1)\}$

$\dim(A)=2,\dim(\mathbb{R}^3)=3$, donc un supplémentaire de A est de dimension 1.

La famille $\{(1;-1;0),(1;0;-1),(1;0;0)\}$ est libre, donc Vect{(1 ; 0 ; 0)} est un supplémentaire de A.

ii) $B=\{P\in\mathbb{R}_2[X] / P(0)=0\}=\text{Vect}\{X;X^2\}$ donc Vect{1} est un supplémentaire de B.

3- On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :
u = (-1 ; 1 ; 1), v = (2 ; 0 ; 1), w = (1 ; 1 ; 2), x = (0 ; 0 ; 1), y = (1 ; 1 ; 1)
Soient E = Vect{u ; v ; w} et F = Vect{x ; y} .

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?
w = u + v donc {u , v, w} est liée. ; u et v ne sont pas colinéaires donc {u ; v} est libre.
{u ; v} est donc une base de E qui est de dimension 2.
x et y ne sont pas colinéaires, donc {x ; y} est libre et forme une base de F qui est de dimension 2.

b) Déterminer une base de E + F. {u ; v ; x} est libre donc E + F = $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

c) Déterminer une base de $E\cap F$. $\dim(E\cap F)=\dim(E)+\dim(F)-\dim(E+F)=1$

$x+y=w\in E\cap F$ donc $E\cap F=\text{Vect}\{w\}$.

C.B. N° 11	ESPACES VECTORIELS	Correction

1- Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, en donner une base.

i) $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = x - z\} = \text{Vect}\{(1;0;0),(0;1;-1)\}$

ii) $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 0\} = \text{Vect}\{(0;0;1)\}$

iii) $G = \{(x;y;z;t) \in \mathbb{R}^4 / xyz = 0\}$ Non :

$(1;0;0;0) \in G$, $(0;1;1;0) \in G$ et $(1;0;0;0) + (0;1;1;0) = (1;1;1;0) \notin G$

iv) $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 1\}$ Non : $0 \notin H$

2- Déterminer un supplémentaire des espaces vectoriels suivants :

i) $A = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} = \text{Vect}\{(0;1;0),(0;0;1)\}$

donc Vect{(1 ; 0 ; 0)} est un supplémentaire de A.

ii) $B = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P'(0) = 0\} = \text{Vect}\{1; X^2\}$ donc Vect{X} est un supplémentaire de B

3- On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

u = (2 ; -1 ; 1), v = (1 ; 0 ; -1), w = (1 ; -1 ; 2), x = (1 ; 1 ; 1), y = (0 ; 2 ; -1)

Soient E = Vect{u ; v ; w} et F = Vect{x ; y} .

a) Quelles sont les dimensions de E et F ?

w = u – v donc {u , v, w} est liée. ; u et v ne sont pas colinéaires donc {u ; v} est libre.
{u ; v} est donc une base de E qui est de dimension 2.
x et y ne sont pas colinéaires, donc {x ; y} est libre et forme une base de F qui est de dimension 2.

b) Déterminer une base de E + F. {u ; v ; x} est libre donc E + F = $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

c) Déterminer une base de E ∩ F. $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E+F) = 1$

$x - y = w \in E \cap F$ donc $E \cap F = \text{Vect}\{w\}$.