C.B. N°12 (30 min)	APPLICATIONS LINEAIRES	26/05/16

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse)
Si oui, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $f(x\,;y\,;z) = (x - y\,;2x + y - z\,)$.

ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $g(x\,;y\,;z) = (x + y\,;xy\,;\mathrm{y} + \mathrm{z})$.

iii) $h : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ / $h(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(1)\,\mathrm{X}^0 + \mathrm{P}'(1)\mathrm{X} + \mathrm{P}''(1)\,\mathrm{X}^2$

2. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,;e_2\,;e_3)$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1\,;e'_2\,;e'_3)$ avec $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Sans calcul, justifier que f n'est pas un endomorphisme bijectif.

C.B. N°12 (30 min)	APPLICATIONS LINEAIRES	26/05/16

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse)
Si oui, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis déterminer le noyau et l'image.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $f(x ; y) = (x - 2y ; 2x + y ; x^2 - y^2)$.

ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $g(x ; y) = (x + 2y ; 2x - 3y ; 0)$.

iii) $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ / $h(P) = P(0)\,X^0 + P'(0)X + P'(1)\,X^2$

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1 ; e_2 ; e_3)$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1 ; e'_2 ; e'_3)$ avec $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = - e_1 + e_3$ et $e'_3 = e_2 + e_3$.

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Sans calcul, justifier que f est un endomorphisme bijectif.