C.B. N°12	**APPLICATIONS LINEAIRES**	**Correction**

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse)

Si oui, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis en déterminer le noyau et l'image.

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $f(x\,;y\,;z) = (x - y\,; 2x + y - z)$ linéaire ;

$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; Ker($f$) = Vect{(1 ; 1 ; 3)} ; Im(f) = $\mathbb{R}^2$

ii) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $g(x\,;y\,;z) = (x + y\,; xy\,; y + z)$ non linéaire :

$g(1\,;0\,;0) + g(0\,;1\,;0) = (2\,;0\,;1) \neq g(1\,;1\,;0)$

iii) $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ / $h(P) = P(1)\,X^0 + P'(1)X + P''(1)\,X^2$ linéaire ;

$\text{mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

la matrice étant clairement inversible (triangulaire sans zéro sur la diagonale), f est bijective et Ker(f) = {0} ; Im(f) = $\mathbb{R}_2[X]$

2. Soit E = $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; e_3)$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1\,; e'_2\,; e'_3)$ avec $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. La famille $(e'_1\,; e'_2\,; e'_3)$ est libre (à prouver) de cardinal 3 c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On a : $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Sans calcul, justifier que f n'est pas un endomorphisme bijectif.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale, avec un zéro sur la diagonale, elle n'est donc pas inversible ; l'endomorphisme f n'est donc pas bijectif.

C.B. N°12	APPLICATIONS LINEAIRES	Correction

1. Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? (Justifier la réponse)

Si oui, en donner la matrice dans les bases canoniques, puis déterminer le noyau et l'image.

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $f(x\,;y) = (x - 2y\,; 2x + y\,; x^2 - y^2)$ non linéaire :
$2\,f(1\,;0\,;0) = (2\,;4\,;2) \neq f(2\,;0\,;0)$

ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $g(x\,;y) = (x + 2y\,; 2x - 3y\,; 0)$ linéaire ;

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; Ker(f) ={(0 ; 0)} ; Im(f) = Vect{(1 ; 2 ; 0) ; (2 ; -3 ; 0)}

iii) $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ / $h(P) = P(0)\,X^0 + P'(0)X + P'(1)\,X^2$ linéaire ;

$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

la matrice étant clairement inversible (triangulaire sans zéro sur la diagonale), f est bijective et Ker(f) = {0} ; Im(f) = $\mathbb{R}_2[X]$

2. Soit E = $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1\,; e_2\,; e_3)$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1\,; e'_2\,; e'_3)$ avec $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = -\,e_1 + e_3$ et $e'_3 = e_2 + e_3$.

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. La famille $(e'_1\,; e'_2\,; e'_3)$ est libre (à prouver) de cardinal 3 c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$; $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Sans calcul, justifier que f est un endomorphisme bijectif.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale, sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible ; l'endomorphisme f est donc bijectif.