C.B. N°13 (30 min)	SERIES NUMERIQUES	07/06/16

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n $(n \geq 1)$ dans les cas suivants (justifier la réponse) :

i) $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

ii) $u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

iii) $u_n = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

2. Etablir la convergence, puis déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ (on fera apparaître un télescopage).

3. a) Soit (u_n) une suite numérique. Montrer que si la série de terme général u_{2n} et la série de terme général u_{2n+1} convergent, alors la série de terme général u_n converge et que dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$.

b) On note $u_n = \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\sum_{n\geq 1} u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent et, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

C.B. N°13 (30 min)	**SERIES NUMERIQUES**	**07/06/16**

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n $(n \geq 1)$ dans les cas suivants (justifier la réponse) :

i) $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n}\right)$

ii) $u_n = \dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

iii) $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}}$

2. a) Donner la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$.

b) En faisant apparaître un télescopage, établir la convergence et déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 2} (-1)^n \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

3. a) Soit (u_n) une suite numérique telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Pour tout n, on note $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$

b) Etablir la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\left(n + (-1)^n\right)}$, $n \geq 2$.