1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n $(n \geq 1)$ dans les cas suivants :

On remarque tout d'abord que toutes les séries considérées sont **positives**.

i) $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ diverge

ii) $u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge

iii) $u_n = \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{-1}{n^2}}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{-1}{n^2}} = 1$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est grossièrement divergente.

2. Etablir la convergence, puis déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ (on fera apparaître un télescopage).

$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$; le terme général de la série considérée est de signe constant, équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

$\forall n \geq 2,\ \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) - (\ln(n) - \ln(n-1)) = v_{n+1} - v_n$ où

$\forall n \geq 2,\ v_n = \ln(n) - \ln(n-1)$; la série est donc une série télescopique et comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$, la série converge, et sa somme vaut : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -v_2 = -\ln 2$.

3. a) Soit (u_n) une suite numérique. Montrer que si la série de terme général u_{2n} et la série de terme général u_{2n+1} convergent, alors la série de terme général u_n converge et que dans ce cas,

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$.

On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k}, I_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{2k+1}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

On a : $S_0 = P_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} = P_n + I_{n-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} = P_n + I_n$

Si $\sum u_{2k}$ et $\sum u_{2k+1}$ convergent, alors (P_n) et (I_n) convergent vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$ respectivement, et (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$. Ainsi (S_n) converge vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$.

b) On note $u_n = \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\sum\limits_{n\geq 1} u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent : $u_{2n} = \frac{1}{4n^2}$ et $u_{2k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum\limits_{n\geq 1} u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ convergent

et, sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

d'après la question précédente, on sait que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_{2k} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1}$;

On en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{2k+1} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_{2k} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n $(n \geq 1)$ dans les cas suivants :

On remarque tout d'abord que toutes les séries considérées sont **positives**.

i) $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ diverge.

ii) $u_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6n^3}$ par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge

iii) $u_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{-2\ln(n)}{n}}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{-2\ln(n)}{n}} = 1$ donc la série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est grossièrement divergente

2. a) Donner la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

$\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$; par comparaison à une série de Riemann divergente, $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ diverge.

b) En faisant apparaître un télescopage, établir la convergence, et déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 2} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

$$(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = (-1)^n \ln(n+1) + (-1)^{n-1}\ln(n) - \left((-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^{n-2}\ln(n-1)\right) = v_{n+1} - v_n$$

où $\forall n \geq 2,\ v_n = (-1)^{n-1}\ln(n) + (-1)^{n-2}\ln(n-1)$; la série est donc une série télescopique et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$, la série converge et sa somme vaut : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = -v_2 = \ln 2$

.

3. a) Soit (u_n) une suite numérique telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Pour tout n, on note $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$

On note : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} = P_n$ et $S_{2n} = P_n - u_{2n+1}$

Si $\sum u_k$ converge, alors (S_{2n+1}) converge vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, et (P_n) converge vers la même limite ;

Si $\sum v_k$ converge, alors (S_{2n+1}) converge vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$ et, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, (S_{2n}) converge vers la même limite ; (S_n) converge donc vers $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k$.

b) Etablir la convergence et la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n\left(n + (-1)^n\right)}$, $n \geq 2$.

$\forall n \geq 2,\ u_{2n} + u_{2n+1} = 0$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$; on déduit de la question précédente que la série $\sum\limits_{n \geq 2} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n = 0$.