C.B. N° 1	**LOGIQUE – RAISONNEMENT**	**Correction**

1- Donner la négation de l'assertion suivante : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \left(|x-a|<1\right) \Rightarrow \left(|f(x)-f(a)| \leq 1\right)$

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \left(|x-a|<1\right) \wedge \left(|f(x)-f(a)| > 1\right)$

2- f désigne une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

Traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

i) f n'est pas croissante. $\exists (x;y) \in \mathbb{R}^2, (x<y) \wedge \left(f(x) > f(y)\right)$

ii) f s'annule en chaque entier. $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0$

iii) Tout réel est inférieur à son image par *f*. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq f(x)$

3- P, Q et R désignent des assertions. Montrer que : $(P \wedge \rceil(Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)$

$(P \wedge \rceil(Q \vee R)) \Leftrightarrow (P \wedge (\rceil Q \wedge \rceil R)) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q \wedge \rceil R)$

4- Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3^{6n-4} - 2$ est un multiple de 7 (en sachant que $3^6 - 1$ est un multiple de 7…)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ P_n : « $\exists k_n \in \mathbb{Z}, 3^{6n-4} - 2 = 7k_n$ ».
$3^2 - 2 = 7$, donc P_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose P_n vraie, c'est-à-dire : $\exists k_n \in \mathbb{Z}, 3^{6n-4} - 2 = 7k_n$.
On a : $3^{6(n+1)-4} - 2 = 3^{6n-4} \times 3^6 - 2 = (7k_n + 2) \times 3^6 - 2 = 7 \times 3^6 k_n + 2(3^6 - 1)$;
$3^6 - 1$ est un multiple de 7 : $3^6 - 1 = (3^3)^2 - 1 = (28-1)^2 - 1 = (4 \times 7)^2 - 2 \times 4 \times 7 = 7(7 \times 16 - 8)$ $= 7 \times c$, $(c \in \mathbb{N})$ (ce calcul n'était pas demandé !) ; d'où : $3^{6(n+1)-4} - 2 = 7 \times k_{n+1}$, avec $k_{n+1} = (3^6 k_n + 2c) \in \mathbb{Z}$.
Ainsi P_{n+1} est vraie.
Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5- Question de cours : Compléter

a) $\rceil(P \wedge Q) \Leftrightarrow \rceil P \vee \rceil Q$

b) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P) \Leftrightarrow (\rceil P \vee Q)$

C.B. N° 1	LOGIQUE – RAISONNEMENT	Correction

1- Donner la négation de l'assertion suivante : $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}\ (n\geq N)\Rightarrow(|u_n|\leq\varepsilon)$

$\exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}\ (n\geq N)\wedge(|u_n|>\varepsilon)$

2- f désigne une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

Traduire à l'aide de quantificateurs les expressions suivantes :

i) f n'admet pas de minimum. $\forall m\in\mathbb{R},\exists x\in\mathbb{R}, f(x)<f(m)$

ii) f ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$. $\exists! a\in\mathbb{R}, f(a)=0$

iii) f n'est pas de signe constant.
$\exists(x;y)\in\mathbb{R}^2, f(x)f(y)<0$

3- P, Q et R désignent des assertions. Montrer que : $((P\wedge\urcorner Q)\wedge\urcorner(R\wedge\urcorner Q))\Leftrightarrow(P\wedge\urcorner(Q\vee R))$

$((P\wedge\urcorner Q)\wedge\urcorner(R\wedge\urcorner Q))\Leftrightarrow((P\wedge\urcorner Q)\wedge(\urcorner R\vee Q))$

$\Leftrightarrow((P\wedge\urcorner Q\wedge\urcorner R)\vee(\underbrace{P\wedge\urcorner Q\wedge Q}_{\text{assertion fausse}})\Leftrightarrow(P\wedge\urcorner(Q\vee R))$

4- Montrer que $\forall x\geq 0,\forall n\in\mathbb{N},(1+x)^n\geq 1+nx$.

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$ P_n : « $\forall x\in\mathbb{R}^+,(1+x)^n\geq 1+nx$ ».

$\forall x\in\mathbb{R}^+,(1+x)^0=1\geq 1+0$, donc P_0 est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$; on suppose P_n vraie, c'est-à-dire : $\forall x\in\mathbb{R}^+,(1+x)^n\geq 1+nx$.

On a $\forall x\geq 0,(1+x)>0$ donc d'après l'hypothèse de récurrence:

$\forall x\in\mathbb{R}^+,(1+x)^{n+1}=(1+x)^n(1+x)\geq(1+nx)(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x$

(car $nx^2\geq 0$) ; ainsi P_{n+1} est vraie.

Par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5- Question de cours : Compléter

a) $\urcorner(P\vee Q)\Leftrightarrow(\urcorner P\wedge\urcorner Q)$

b) $\urcorner(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(P\wedge\urcorner Q)$