C.B. N° 2	APPLICATIONS	Correction

1- Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier les réponses):

i) $f:[-1;1]\to[0;1]$ $\quad f(x)=|x|$

$f(-1)=f(1)$, donc f n'est pas injective ;

$\forall x\in[0,1], x\in[-1;1]$ et $f(x)=x$, donc f est surjective.

ii) $u:[0;1]\to[-1;1]$ $\quad u(x)=\sin(\pi x)$

$u(0)=u(1)=0$, donc u n'est pas injective.

$\forall x\in[0,1], \sin(\pi x)\geq 0$, donc -1 n'a pas d'antécédent par u qui n'est donc pas surjective.

iii) $g:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ $\quad g(z)=2(\mathrm{Re}(z)-\mathrm{Im}(z))$

$g(1)=g(-i)=2$, donc g n'est pas injective ;

$\forall x\in\mathbb{R}, g\left(\frac{1}{2}x\right)=x$, donc g est surjective.

iv) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $\quad h(x)=(x;x^2)$

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2, h(x)=h(y)\Leftrightarrow(x;x^2)=(y;y^2)\Leftrightarrow x=y$, donc h est injective ;

(1; 0) n'a pas d'antécédent par h (car on ne peut pas avoir $x=1$ et $x^2=0$), donc h n'est pas surjective.

2- Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{l}[-1;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{1+x^2}\end{array}\right.$.

Montrer que f est une bijection de [-1 ; 1] sur une partie J de $\mathbb{R}$ à préciser.

f est dérivable sur [-1 ; 1] comme quotient de fonctions dérivables, et

$\forall x\in[-1;1], f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; on a donc $\forall x\in]-1;1[, f'(x)>0$;

Sur [-1 ; 1], f est continue, strictement croissante et $f(-1)=-\frac{1}{2}$ et $f(1)=\frac{1}{2}$.

On en déduit que la fonction f est bijective de [-1 ; 1] sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

3- Question de cours : Compléter la proposition suivante et la démontrer

« Soient E, F, G des ensembles, $f\in F^E$ et $g\in G^F$; si $g\circ f$ est injective, alors f est injective. »

Si $f(a)=f(b)$ alors $g(f(a))=g(f(b))$ donc $a=b$ car $g\circ f$ est injective ; f est donc injective.

C.B. N° 2	**APPLICATIONS**	**Correction**

1- Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes (justifier les réponses):

i) $f:[-1;0]\to[0;1]$ $\qquad f(x)=|x|$

$\forall x\in[-1,0],\ f(x)=-x$, donc $\forall(x;y)\in[-1;0]^2,\ f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$; f est donc injective.

$\forall x\in[0,1], -x\in[-1;0]$ et $f(-x)=|x|$, f est donc surjective.

ii) $u:\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\to[-1;1]$ $\qquad u(x)=\cos(\pi x)$

$u\left(-\frac{1}{2}\right)=u\left(\frac{1}{2}\right)=0$, donc u n'est pas injective.

$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], \cos(\pi x)\geq 0$, donc -1 n'a pas d'antécédent par u qui n'est donc pas surjective.

iii) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ $\qquad g(x)=x(1+i)$

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2, g(x)=g(y)\Leftrightarrow x=y$, g est donc injective.

Soit $x\in\mathbb{R}$; $g(x)=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}\notin\mathbb{R}$. g n'est donc pas surjective.

iv) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\qquad h(x;y)=x+y$

$h(1 ; 0) = h(0 ; 1)$, donc h n'est pas injective.

$\forall x\in\mathbb{R}, g(x;0)=x$ donc h est surjective.

2- Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{l}[0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x^2}{1+x}\end{array}\right.$.

Montrer que f est une bijection de [0 ; 1] sur une partie J de $\mathbb{R}$ à préciser.

f est dérivable sur [0 ; 1] comme quotient de fonctions dérivables, et

$\forall x\in[0;1], f'(x)=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}>0$;

Sur [0 ; 1], f est continue, strictement croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{2}$.

On en déduit que la fonction f est bijective de [0 ; 1] sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

.

3- Question de cours : Compléter la proposition suivante et la démontrer

« Soient E, F, G des ensembles, $f\in F^E$ et $g\in G^F$; si $g\circ f$ est surjective, alors g est surjective ».

Soit $c\in G$. $g\circ f$ est surjective donc $\exists a\in E$ tel que $g\circ f\ (a) = c$, d'où $g(f(a)) = c$ (avec $f(a)\in F$); g est donc surjective.