C.B. N° 3 **GENERALITES SUR LES FONCTIONS** **Correction**

1- Résoudre les inéquations suivantes :

i) $\sqrt{2x^2+2x-4} \geq x+1$ Cette inéquation se résout dans $]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[$.

Si $x \leq -1$, l'inégalité est toujours vérifiée, donc un premier ensemble de solutions est : $]-\infty;-2]$;

Si $x \geq -1$, l'inéquation est équivalente à : $2x^2+2x-4 \geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-5 \geq 0$, donc :

$S =]-\infty;-2] \cup \left[\sqrt{5};+\infty\right[$

ii) $-1 \leq \dfrac{2x+1}{x-1} \leq 1$ Cette inéquation se résout dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Elle équivaut dans cet ensemble à : $\left|\dfrac{2x+1}{x-1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2+6x \leq 0$. $S = [-2;0]$ (on a bien $1 \notin [-2;0]$).

2- Résoudre l'inéquation suivante, en discutant suivant les valeurs du paramètre m : $\dfrac{x+1}{x-2} \geq m$

Cette inéquation se résout dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Elle équivaut à :

$$\frac{x+1-m(x-2)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-m)x+1+2m}{x-2} \geq 0.$$

<u>Si $m = 1$</u>, l'inéquation s'écrit : $\dfrac{3}{x-2} \geq 0$; l'ensemble des solutions est alors $S =]2;+\infty[$.

Si $m \neq 1$, le numérateur s'annule pour $x = \dfrac{1+2m}{m-1} = \dfrac{2(m-1)+3}{m-1} = 2 + \dfrac{3}{m-1}$. On a donc :

<u>Si $m < 1$</u> : $m-1 < 0$ et $2+\dfrac{3}{m-1} < 2$ d'où :

x	$-\infty$		$\dfrac{1+2m}{m-1}$		2		$+\infty$
$(1-m)x+1+2m$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{(1-m)x+1+2m}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

<u>Si $m > 1$</u> : $m-1 > 0$ et $2+\dfrac{3}{m-1} > 2$ d'où :

x	$-\infty$		2		$\dfrac{1+2m}{m-1}$		$+\infty$
$(1-m)x+1+2m$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(1-m)x+1+2m}{x-2}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

En conclusion :

<u>Si $m=1$</u> : $S =]2;+\infty[$; <u>Si $m<1$</u> : $S = \left]-\infty;\dfrac{1+2m}{m-1}\right] \cup]2;+\infty[$; <u>Si $m>1$</u> : $S = \left]2;\dfrac{1+2m}{m-1}\right]$

3- a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{|2x+1|-1}$.

On veut $|2x+1|-1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 1 \Leftrightarrow 4x^2+4x \geq 0$. $D_f =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$

b) Réduire le domaine d'étude de f grâce à une propriété de symétrie de sa courbe dans un repère orthonormé.

$f\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right)=f(x)$ donc f peut s'étudier sur $[0;+\infty[$, le reste de la courbe de f s'obtenant par une symétrie d'axe la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$

4- Etablir les transformations successives à appliquer à des courbes de fonctions usuelles dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ pour obtenir les courbes des fonctions suivantes :

i) $u : x \mapsto x^2+x+1$; $u(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

La courbe de u se déduit de la courbe de la fonction carrée par une translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}$

ii) $v : x \mapsto \frac{x+2}{x+3}$; $v(x)=1-\frac{1}{x+3}$.

La courbe de v se déduit de la courbe de la fonction inverse par une translation de vecteur $-3\vec{i}$, suivie d'une affinité de rapport (-1) par rapport à (Oy) (symétrie d'axe (Ox)), suivie d'une translation de vecteur $\vec{j}$.

5- a) Donner l'expression de la fonction dont la courbe est obtenue dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ à partir de la courbe de la fonction sinus, en effectuant les transformations suivantes :

i) Une affinité de rapport 3 parallèlement à (Ox), suivie d'une translation de vecteur $\vec{i}$.

$u(x)=\sin\left(\frac{1}{3}(x-1)\right)$

ii) Une translation de vecteur $\vec{j}$, suivie d'une affinité de rapport 2 parallèlement à (Oy).

$v(x)=2(\sin(x)+1)$

b) Donner la plus petite période des fonctions établies dans la question précédente.

i) u est 6π –périodique ;

ii) v est 2π –périodique.

1- Résoudre les inéquations suivantes :

i) $\sqrt{4-x^2} \leq x+1$ Cette inéquation se résout dans $[-2;2]$.

Si $x<-1$, l'inégalité n'est jamais vérifiée (il n'y a donc pas de solution dans [-2 ; -1[).

Si $x \geq -1$, l'inéquation est équivalente à : $4-x^2 \leq x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x^2+2x-3 \geq 0$; donc :

$S=\left[\frac{-1+\sqrt{7}}{2};2\right]$

ii) $-1 \leq \frac{x-2}{3x+1} \leq 1$ Cette inéquation se résout dans $\mathbb{R}\setminus\{-1/3\}$. Elle équivaut dans cet ensemble à : $\left|\frac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq (3x+1)^2 \Leftrightarrow 8x^2+10x-3 \leq 0$. $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ (on a bien $-1/3 \notin S$).

2- Résoudre l'inéquation suivante, en discutant suivant les valeurs du paramètre m : $\frac{x-1}{2-x} \leq m$

Cette inéquation se résout dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Elle équivaut à :

$$\frac{x-1-m(2-x)}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(1+m)x-1-2m}{2-x} \leq 0.$$

<u>Si $m = -1$</u>, l'inéquation s'écrit : $\frac{1}{2-x} \leq 0$; l'ensemble des solutions est alors $S=]2;+\infty[$.

Si $m \neq -1$, le numérateur s'annule pour $x=\frac{1+2m}{1+m}=\frac{2(m+1)-1}{m+1}=2-\frac{1}{m+1}$. On a donc :

<u>Si $m < -1$</u> : $m+1<0$ et $2-\frac{1}{m+1}>2$ d'où :

X	$-\infty$		2		$\frac{1+2m}{1+m}$		$+\infty$
$(1+m)x-1-2m$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2-x$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$\frac{(1+m)x-1-2m}{2-x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

<u>Si $m > -1$</u> : $m+1>0$ et $2-\frac{1}{1+m}<2$ d'où :

X	$-\infty$		$\frac{1+2m}{1+m}$		2		$+\infty$
$(1+m)x-1-2m$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\frac{(1+m)x-1-2m}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

En conclusion :

<u>Si $m=-1$</u>: $S=]2;+\infty[$; <u>Si $m<-1$</u>: $S=\left]2;\frac{1+2m}{1+m}\right]$; <u>Si $m>-1$</u>: $S=\left]-\infty;\frac{1+2m}{1+m}\right] \cup]2;+\infty[$

3- **a)** Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{|1-3x|-1}$.

On veut $|1-3x|-1 \geq 0 \Leftrightarrow (1-3x)^2 \geq 1 \Leftrightarrow 9x^2-6x \geq 0$. $D_f = \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right[$.

b) Réduire le domaine d'étude de f grâce à une propriété de symétrie de sa courbe dans un repère orthonormé.

$f\left(2\times\left(\frac{1}{3}\right)-x\right) = f(x)$ donc f peut s'étudier sur $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$, le reste de la courbe de f s'obtenant par une symétrie d'axe la droite d'équation $x=\frac{1}{3}$.

4- Etablir les transformations successives à appliquer à des courbes de fonctions usuelles dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ pour obtenir les courbes des fonctions suivantes :

i) $u : x \mapsto 1+x-x^2$; $u(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.

La courbe de *u* se déduit de la courbe de la fonction carrée par une translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{i}$ suivie d'une affinité de rapport (-1) par rapport à (O*y*) (symétrie d'axe (O*x*)), suivie d'une translation de vecteur $\frac{5}{4}\vec{j}$.

ii) $v : x \mapsto \frac{x+4}{x+3}$; $v(x) = 1+\frac{1}{x+3}$.

La courbe de *v* se déduit de la courbe de la fonction inverse par une translation de vecteur $-3\vec{i}+\vec{j}$.

5- **a)** Donner l'expression de la fonction dont la courbe est obtenue dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ à partir de la courbe de la fonction cosinus, en effectuant les transformations suivantes :

i) Une affinité de rapport $\frac{1}{2}$ parallèlement à (O*y*), suivie d'une translation de vecteur $\vec{j}$.

$u(x) = \frac{1}{2}\cos(x)+1$

ii) Une translation de vecteur $\vec{i}$, suivie d'une affinité de rapport 2 parallèlement à (O*x*).

$u(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x-1\right)$

b) Donner la plus petite période des fonctions établies dans la question précédente.

i) *u* est 2π –périodique ;

ii) *v* est 4π –périodique.