C.B. N° 4 **TRIGONOMETRIE – NOMBRES COMPLEXES** **Correction**

1- Résoudre les équations suivantes :

i) $\cos(3x)-\sin(3x)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x)=1 \Leftrightarrow \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \left(3x+\frac{\pi}{4}=2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right)$; $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

ii) $\cos(2x)+\cos(4x)=2\cos(x) \Leftrightarrow 2\cos(3x)\cos(x)=2\cos(x) \Leftrightarrow \cos(x)(\cos(3x)-1)=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos(x)=0 \quad \text{ou} \quad \cos(3x)=1\right) \Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad 3x=2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right)$

$S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{2k\pi}{3}\right\}$

2- Compéter l'égalité suivante, et la justifier : $\cos a-\cos b= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos a-\cos b=\mathrm{Re}\left(e^{ia}-e^{ib}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)$

$=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

3- Donner les racines quatrièmes du nombre complexe $z = 2 – 2i$ $=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$S=\left\{2^{\frac{3}{8}}e^{-i\frac{\pi}{16}};2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{7\pi}{16}};2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{15\pi}{16}};2^{\frac{3}{8}}e^{i\frac{23\pi}{16}}\right\}$

4- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2+z-1+3i=0$

Le discriminant vaut $5 – 12i$ dont une racine carrée est $3 – 2i$. $S=\{1-i;-2+i\}$

5- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^3+(-3+8i)z^2-(5+10i)z+3+3i=0$, en montrant que l'équation admet une solution réelle.

$x\in\mathbb{R}$ est solution si, et seulement si : $\begin{cases}2x^3-3x^2-5z+3=0\\8x^2-10x+3=0\end{cases}$

La deuxième équation admet pour solutions $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ est solution de la première équation.

L'équation initiale s'écrit : $(2z-1)\left(z^2+(-1+4i)z-3-3i\right)=0$.

L'équation $z^2+(-1+4i)z-3-3i=0$ a pour discriminant $-3 + 4i$ dont une racine carrée est $1 + 2i$;

ses solutions sont $1 – i$ et $-3i$.

Finalement $S=\left\{\frac{1}{2};1-i;-3i\right\}$.

C.B. N° 4	TRIGONOMETRIE – NOMBRES COMPLEXES	Correction

1- Résoudre les équations suivantes :

i) $$\sin(2x)-\cos(2x)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z}\right) ; \qquad S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{3\pi}{8}+k\pi\right\}$$

ii) $$\sin(3x)+\sin(5x)=2\sin(4x) \Leftrightarrow 2\sin(4x)\cos(x)=2\sin(4x) \Leftrightarrow \sin(4x)(\cos(x)-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin(4x)=0 \quad \text{ou} \quad \cos(x)=1) \Leftrightarrow (4x=k\pi \quad \text{ou} \quad x=2k\pi \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z})$$

$$S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{k\pi}{4}\right\}$$

2- Compéter l'égalité suivante, et la justifier : $\sin a-\sin b=\ 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\times\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\sin a-\sin b=\mathrm{Im}\left(e^{ia}-e^{ib}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

3- Donner les racines cinquièmes du nombre complexe $z=\sqrt{3}+i\ =2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$S=\left\{2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{30}};2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{13\pi}{30}};2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{5\pi}{6}};2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{37\pi}{30}};2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{49\pi}{30}}\right\}$$

4- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2+iz+1+3i=0$$

Le discriminant vaut -5 – 12i dont une racine carrée est 2 – 3i. $S=\{1-2i;-1+i\}$

5- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $3z^3+(2-9i)z^2-(7+3i)z+2+2i=0$, en montrant que l'équation admet une solution réelle.

$x\in\mathbb{R}$ est solution si, et seulement si : $\begin{cases}3x^3+2x^2-7z+2=0\\-9x^2-3x+2=0\end{cases}$

La deuxième équation admet pour solutions $-\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3}$ est solution de la première équation.

L'équation initiale s'écrit : $(3z-1)\left(z^2+(1-3i)z-2-2i\right)=0$.

L'équation $z^2+(1-3i)z-2-2i=0$ a pour discriminant 2i dont une racine carrée est 1 + i ;

ses solutions sont 2i et -1 + i.

Finalement $S=\left\{\frac{1}{3};2i;-1+i\right\}$.