C.B. N° 5 **FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES** **CORRECTION**

1- Calculer :

i) $\text{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

ii) $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3}{5}\pi\right)\right) = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$

iii) $\text{Arccos}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \text{Arc}\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{7\pi}{12}$

2- Simplifier :

$\cos(2\text{Arctan } x) = 2\cos^2(\text{Arc}\tan(x)) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\text{Arc}\tan(x))} - 1 = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : Arccos(x) = Arcsin(2x).

Le domaine de définition de l'équation est $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, **<u>SI</u>** x est solution de (E) **<u>ALORS</u>** :

sin(Arccos(x)) = sin(Arcsin(2x)) $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x \geq 0} \\ 1-x^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

RECIPROQUEMENT, pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a : sin(Arccos(x)) = sin(Arcsin(2x)) et

(Arccos(x) ; Arcsin(2x)) $\in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2$, d'où Arccos($x$) = Arcsin (2$x$).

Finalement l'ensemble des solution est $\boxed{\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}}$.

<u>Remarque</u> : on peut également considérer la fonction $f : x \mapsto \text{Arc}\sin(2x) - \text{Arc}\cos(x)$ qui est continue et croissante sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ car $x \mapsto \text{Arc}\sin(2x)$ et $x \mapsto -\text{Arc}\cos(x)$ le sont, avec $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité d'une solution (positive) de l'équation $f(x) = 0$.

4- Soit la fonction f définie par : $f(x)$ = Arcsin $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f, puis la dériver.

f est définie pour tout réel $x \neq 1$ tel que :

$$\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(|1+x| \leq |1-x|\right) \Leftrightarrow \left((1+x)^2 \leq (1-x)^2\right) \Leftrightarrow (x \leq 0) \text{ ; donc } \boxed{D_f = \mathbb{R}_-}$$

f est dérivable pour tout réel x **<u>de D_f</u>** tel que $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| \neq 1$.

$$\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 1\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{x = 1 \text{ n'est pas solution de} \\ \text{la deuxième équation}}} \left(|1+x| = |1-x|\right) \Leftrightarrow \left((1+x)^2 = (1-x)^2\right) \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ; donc } \boxed{D_{f'} = \mathbb{R}_-^*}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f'(x) = \frac{\dfrac{(1-x)-(-1)\times(1+x)}{(1-x)^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}}} = \frac{2}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{-4x}{(1-x)^2}}} = \frac{2}{(1-x)^2\,\dfrac{2\sqrt{-x}}{|1-x|}} \underbrace{=}_{1-x>0} \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}.$$

C.B. N° 5 **FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES** **CORRECTION**

1- Calculer :

i) $\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

ii) $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)\right) = 2\pi - \frac{7\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$

iii) $\text{Arcsin}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \text{Arc}\sin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{5\pi}{12}$

2- Simplifier : $\sin^2(\text{Arctan } x) = 1 - \cos^2(\text{Arc}\tan(x)) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arc}\tan(x))} = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : Arccos(2x) = Arcsin(x).

Le domaine de définition de l'équation est $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, <u>**SI**</u> x est solution de (E) <u>**ALORS**</u> :

$\cos(\text{Arccos}(2x)) = \cos(\text{Arcsin}(x)) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x \geq 0} \\ 1-x^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

RECIPROQUEMENT, pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a : $\cos(\text{Arccos}(2x)) = \cos(\text{Arcsin}(x))$ et

$(\text{Arccos}(2x) ; \text{Arcsin}(x)) \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]^2$, d'où $\text{Arccos}(2x) = \text{Arcsin}(x)$.

Finalement l'ensemble des solution est $\boxed{\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}}$.

<u>*Remarque*</u> : on peut également considérer la fonction $f : x \mapsto \text{Arc}\sin(x) - \text{Arc}\cos(2x)$ qui est continue et croissante sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ car $x \mapsto \text{Arc}\sin(x)$ et $x \mapsto -\text{Arc}\cos(2x)$ le sont, avec $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité d'une solution (positive) de l'équation $f(x) = 0$.

4- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de *f*, puis la dériver.

f est définie pour tout réel $x \neq -1$ tel que :

$$\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(|x-1| \leq |x+1|\right) \Leftrightarrow \left((x-1)^2 \leq (x+1)^2\right) \Leftrightarrow (x \geq 0) \text{ ; donc } \boxed{D_f = \mathbb{R}_+}$$

f est dérivable pour tout réel x **de D_f** tel que $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \neq 1$.

$$\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1\right) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{x=-1 \text{ n'est pas solution de} \\ \text{la deuxième équation}}} \left(|x-1| = |x+1|\right) \Leftrightarrow \left((x-1)^2 = (x+1)^2\right) \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ; donc } \boxed{D_{f'} = \mathbb{R}_+^*}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{-\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}}{\sqrt{1-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}} = \frac{-2}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{4x}{(x+1)^2}}} = \frac{-2}{(x+1)^2\dfrac{2\sqrt{x}}{|x+1|}} \underbrace{=}_{x+1>0} \frac{-1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$