C.B. N° 7 **SUITES NUMERIQUES** **Correction**

1 - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $a_0=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=3a_n-4$.

a) Expliciter a_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

La suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique. Soit $f:x\mapsto 3x-4$; $f(2)=2$.

$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}-2=3(a_n-2)$; donc $(a_n-2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3, de premier terme -3.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n-2=-3\times 3^n$ et par suite, $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=-3\times 3^n+2=2-3^{n+1}$.

b) Expliciter $\sum_{k=0}^{n} a_k$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_k=\sum_{k=0}^{n}\left(2-3^{n+1}\right)=2(n+1)-3\times\sum_{k=0}^{n}3^n=2(n+1)-3\times\frac{3^{n+1}-1}{2}$$

2 - Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $v_0=-1,\ v_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=v_{n+1}+2v_n$.

Expliciter v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2-r-2=0$ qui a pour racines -1 et 2. On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\lambda(-1)^n+\mu\times 2^n$ et $\begin{cases} v_0=-1 \\ v_1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=-1 \\ -\lambda+2\mu=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{-4}{3} \end{cases}$ et $\mu=\frac{1}{3}$.

Finalement, $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\frac{4}{3}(-1)^{n+1}+\frac{1}{3}\times 2^n$.

3- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n{}^2+1}$.

Etudier les variations et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $f:x\mapsto\frac{2x}{x^2+1}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$; $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

Les variations de f donnent : f croissante sur l'intervalle [-1 ; 1], qui est stable par f.

$u_0\in[-1;1]$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)\in[-1;1]$; de plus, $u_0=\frac{1}{2}$, $u_1=\frac{4}{5}>u_0$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante, majorée par 1 ; f étant continue sur son domaine, la suite (u_n) converge vers $x\in[u_0;1]$ tel que $f(x)=x$. Comme $f(x)=x\Leftrightarrow x\in\{0;-1;1\}$, on a : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

1 - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $a_0=-1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=-2a_n+3$.

a) Expliciter a_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

La suite (a_n) est une suite arithmético-géométrique. Soit $f: x\mapsto -2x+3$; $f(1)=1$.

$\forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$; donc $(a_n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2, de premier terme -2.

On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n-1=(-2)^{n+1}$ et par suite, $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=(-2)^{n+1}+1$.

b) Expliciter $\sum_{k=0}^{n} a_k$ en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} a_k=\sum_{k=0}^{n}\left((-2)^{n+1}+1\right)=2\times\frac{(-2)^{n+1}-1}{3}+(n+1)$$

2 - Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $v_0=0,\ v_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=2v_n-v_{n+1}$.

Expliciter v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2+r-2=0$ qui a pour racines 1 et -2. On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\lambda(-2)^n+\mu$ et $\begin{cases} v_0=0 \\ v_1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=0 \\ -2\lambda+\mu=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \lambda=\frac{-2}{3} \right.$ et $\mu=\frac{2}{3}$.

Finalement, $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\frac{1}{3}(-2)^{n+1}+\frac{2}{3}$.

3- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(u_n{}^2+7\right)}+3$.

Etudier les variations et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $f: x\mapsto\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+7)}+3$; f est définie sur $\mathbb{R}$ et, par composition de fonctions usuelles $\left(x\mapsto\frac{1}{2}(x^2+7)\text{ et } x\mapsto\sqrt{x}+3\right)$, on a : f croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui est stable par f (car $f(0)>0$).

$u_0>0$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)>0$; de plus $u_0=3,\ u_1=2\sqrt{2}+3>u_0$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

f étant continue sur son domaine, si la suite (u_n) converge, sa limite x est telle que $f(x)=x$.

$$\left(f(x)=x\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+7)}=x-3\right)\Leftrightarrow\left((x\geq 3)\wedge\left(\frac{1}{2}(x^2+7)=x-3\right)\right)\Leftrightarrow(x=11)$$

f est croissante sur [0 ; 11] ; $f(0)>0$ et $f(11)=11$, donc l'intervalle [0 ; 11] est stable par f.

$u_0\in[0;11]$, donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[0;11]$.

On en déduit que la suite est croissante, majorée par 11, et par suis qu'elle converge vers $x=11$.