C.B. N° 8 (1h)	GEOMETRIE	11/02/16

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives (-1 ; 0), (2 ; 4) et (3 ; 3).

a) Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant.

b) Etablir une équation cartésienne de la droite (AB).

c) En déduire la distance de C à (AB), et retrouver l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 2

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (1 ; 0 ; -1), (0 ; 1 ; 1), (2 ; -1 ; 1), (0 ; 0 ; 2), et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (1 ; 1 ; 0) et (0 ; 1 ; -1) dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1. Enoncer la formule permettant de calculer la distance entre un point M de coordonnées $\left(x_0;y_0;z_0\right)$ et un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et la démontrer.

2. a) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ = (ABC).

b) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ = D + Vect$\left\{\vec{u};\vec{v}\right\}$

c) Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

d) Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.

3. a) Soit [MN] un segment de l'espace, de milieu I.

On appelle *plan médiateur* du segment [MN] le plan orthogonal à (MN), passant par I : I + Vect$\left(\overrightarrow{MN}\right)^{\perp}$.

Montrer que pour tout point H de $\mathscr{E}$, $HM^2 = HN^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$;

en déduire que le plan médiateur de [MN] est l'ensemble des points équidistants de M et N.

b) Montrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation : $x - y - 2z = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations
$x - y - 1 = 0$ et $2x - y - z - 1 = 0$.

c) Montrer que les trois plans médiateurs ont un unique point commun, et en déterminer les coordonnées.

d) En utilisant ce qui précède, montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère, dont on déterminera le centre, et le rayon.

C.B. N° 8 (1h)	GEOMETRIE	11/02/16

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives (-1 ; 1), (2 ; -3) et (-2 ; 3).

a) Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant.

b) Etablir une équation cartésienne de la droite (AB).

c) En déduire la distance de C à (AB), et retrouver l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 2

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (-1 ; 1 ; 1), (0 ; -1 ; 2), (2 ; -2 ; 1), (1 ; 0 ; 3), et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (1 ; 0 ; -1) et (0 ; 1 ; -2) dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1. Enoncer la formule permettant de calculer la distance entre un point M et une droite $\Delta = \text{N} + \text{Vect}\left\{\vec{u}\right\}$, et la démontrer.

2. a) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ = (ABC).

b) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ = D + Vect$\left\{\vec{u};\vec{v}\right\}$

c) Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

d) Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.

3. a) Soit [MN] un segment de l'espace, de milieu I.

On appelle *plan médiateur* du segment [MN] le plan orthogonal à (MN), passant par I : I + Vect$\left(\overline{\text{MN}}\right)^{\perp}$.

Montrer que pour tout point H de $\mathscr{E}$, $\text{HM}^2 = \text{HN}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{HI}} \cdot \overrightarrow{\text{MN}} = 0$;
en déduire que le plan médiateur de [MN] est l'ensemble des points équidistants de M et N.

b) Montrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation : $x - 2y + z - 1 = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations
$2x - \text{y} - \text{z} - 2 = 0$ et $2x - 4y - 4z + 1 = 0$.

c) Montrer que les trois plans médiateurs ont un unique point commun, et en déterminer les coordonnées.

d) En utilisant ce qui précède, montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère, dont on déterminera le centre, et le rayon.