C.B. N° 8	GEOMETRIE	CORRECTION

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives (-1 ; 0), (2 ; 4) et (3 ; 3).

a) Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant. $\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)\right| = \frac{7}{2}$

b) Etablir une équation cartésienne de la droite (AB).

$\text{M}(x;y) \in (\text{AB}) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\text{AM}}, \overrightarrow{\text{AB}}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 4 = 0$

c) En déduire la distance de C à (AB), $\text{d}(\text{C},(\text{AB})) = \frac{|4\times 3 - 3\times 3 + 4|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5}$,

et retrouver l'aire du triangle ABC $\text{Aire}(\text{ABC}) = \frac{\text{d}(\text{C},(\text{AB}))\times \text{AB}}{2} = \frac{7}{2}$

EXERCICE 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (1 ; 0 ; -1), (0 ; 1 ; 1), (2 ; -1 ; 1), (0 ; 0 ; 2), et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (1 ; 1 ; 0) et (0 ; 1 ; -1) dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1. Enoncer la formule permettant de calculer la distance entre un point M de coordonnées $(x_0;y_0;z_0)$ et un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et la démontrer. (cf cours)

2. a) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ = (ABC).

$\text{M}(x;y;z) \in (\text{ABC}) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\text{AM}}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

b) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{Q}$ = D + Vect$\left\{\vec{u};\vec{v}\right\}$

$\text{M}(x;y;z) \in \mathscr{Q} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\text{DM}}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 0 \Leftrightarrow -x + y + z - 2 = 0$

c) Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.

$$\text{M}(x;y;z) \in (\text{ABC}) \cap \mathscr{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

d) Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.

D'après la question précédente, $\mathscr{D} = \text{T} + \text{Vect}\left\{\vec{s}\right\}$ où $\text{T}(0;1;1)$ et $\vec{s}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\text{d}(O;\mathscr{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{\text{OT}} \wedge \vec{s}\right\|}{\left\|\vec{s}\right\|} = \sqrt{\frac{11}{6}}$

3. a) Soit [MN] un segment de l'espace, de milieu I.

On appelle *plan médiateur* du segment [MN] le plan orthogonal à (MN), passant par I : I + Vect$\left(\overrightarrow{\text{MN}}\right)^{\perp}$.

Montrer que pour tout point H de $\mathscr{E}$, $\text{HM}^2 = \text{HN}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{HI}} \cdot \overrightarrow{\text{MN}} = 0$;

Soit $H \in \mathscr{E}$; $HM^2 = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM} = \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM}\right) = HI^2 + IM^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IM}$; de même :

$HN^2 = \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HN} = \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IN}\right) = HI^2 + IN^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IN}$.

$HM^2 = HN^2 \Leftrightarrow HI^2 + IM^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IM} = HI^2 + IN^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ (car I est le milieu de [MN])

en déduire que le plan médiateur de [MN] est l'ensemble des points équidistants de M et N.

Ainsi H est équidistant de M et de N si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à dire que H est dans le plan passant par I, de vecteur normal $\overrightarrow{MN}$: c'est le plan médiateur de [MN].

b) Montrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation : $x - y - 2z = 0$.

Le plan médiateur de [AB] passe par le milieu I de [AB] qui a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et a le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Son équation est bien $x - y - 2z = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations $x - y - 1 = 0$ et $2x - y - z - 1 = 0$.

c) Montrer que les trois plans médiateurs ont un unique point commun, et en déterminer les coordonnées.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - y = 1 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y + 3z = 1 \\ 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) = \left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right) ;$$

ainsi les trois plans ont pour unique point commun le point E de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

d) En utilisant ce qui précède, montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère, dont on déterminera le centre, et le rayon.

Le point E défini à la question précédente est sur les trois plans médiateurs, donc (d'après la question **3.a**) : AE = BE = CE = DE.

Ainsi, les points A, B, C et D sont sur la sphère de centre E, de rayon $AE=\sqrt{\frac{11}{4}}$

C.B. N° 8	GEOMETRIE	CORRECTION

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B et C d'abscisses respectives (-1 ; 1), (2 ; -3) et (-2 ; 3).

a) Calculer l'aire du triangle ABC à l'aide d'un déterminant. $\mathrm{Aire}(\mathrm{ABC})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right|=1$

b) Etablir une équation cartésienne de la droite (AB).

$\mathrm{M}(x;y)\in(\mathrm{AB})\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=0\Leftrightarrow 4x+3y+1=0$

c) En déduire la distance de C à (AB), $\mathrm{d}(\mathrm{C},(\mathrm{AB}))=\frac{|4\times(-2)+3\times 3+1|}{\sqrt{16+9}}=\frac{2}{5}$

et retrouver l'aire du triangle ABC. $\mathrm{Aire}(\mathrm{ABC})=\frac{\mathrm{d}(\mathrm{C},(\mathrm{AB}))\times\mathrm{AB}}{2}=1$

EXERCICE 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (-1 ; 1 ; 1), (0 ; -1 ; 2), (2 ; -2 ; 1), (1 ; 0 ; 3), et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (1 ; 0 ; -1) et (0 ; 1 ; -2) dans la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

1. Enoncer la formule permettant de calculer la distance entre un point M et une droite Δ = N + Vect $\{\vec{u}\}$, et la démontrer. Cf cours

2. a) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ = (ABC).

$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{ABC})\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=0\Leftrightarrow x+y+z-1=0$

b) Etablir une équation cartésienne du plan $\mathscr{C}$ = D + Vect$\{\vec{u};\vec{v}\}$

$\mathrm{M}(x;y;z)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{\mathrm{DM}},\vec{u},\vec{v}\right)=0\Leftrightarrow x+2y+z-4=0$

c) Donner un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}$, intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$.

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{ABC})\cap\mathscr{C}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z-1=0\\x+2y+z-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2-t\\y=3\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

d) Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.

D'après la question précédente, $\mathscr{D}=\mathrm{T}+\mathrm{Vect}\{\vec{s}\}$ où $\mathrm{T}(-2;3;0)$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\mathrm{d}(O;\mathscr{D})=\frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OT}}\wedge\vec{s}\right\|}{\left\|\vec{s}\right\|}=\sqrt{11}$

3. a) Soit [MN] un segment de l'espace, de milieu I.

On appelle *plan médiateur* du segment [MN] le plan orthogonal à (MN), passant par I : I + Vect$\left(\overrightarrow{\mathrm{MN}}\right)^{\perp}$.

Montrer que pour tout point H de $\mathscr{E}$, $\mathrm{HM}^2=\mathrm{HN}^2\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{HI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$;

Soit $H \in \mathscr{E}$; $HM^2 = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HM} = \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM}\right) = HI^2 + IM^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IM}$; de même :

$HN^2 = \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HN} = \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IN}\right) \cdot \left(\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IN}\right) = HI^2 + IN^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IN}$.

$HM^2 = HN^2 \Leftrightarrow HI^2 + IM^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IM} = HI^2 + IN^2 + 2\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ (car I est le milieu de [MN])

en déduire que le plan médiateur de [MN] est l'ensemble des points équidistants de M et N.

Ainsi H est équidistant de M et de N si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont orthogonaux, ce qui équivaut à dire que H est dans le plan passant par I, de vecteur normal $\overrightarrow{MN}$: c'est le plan médiateur de [MN].

b) Montrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation : $x - 2y + z - 1 = 0$.

Le plan médiateur de [AB] passe par le milieu I de [AB] qui a pour coordonnées $\left(\frac{-1}{2};0;\frac{3}{2}\right)$ et a le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Son équation est bien $x - 2y + z - 1 = 0$.

On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations
$2x - y - z - 2 = 0$ et $2x - 4y - 4z + 1 = 0$.

c) Montrer que les trois plans médiateurs ont un unique point commun, et en déterminer les coordonnées.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ 2x - 4y - 4z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3y - 3z = 0 \\ -6z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y;z) = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) ;$$

ainsi les trois plans ont pour unique point commun le point E de coordonnées $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

d) En utilisant ce qui précède, montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère, dont on déterminera le centre, et le rayon.

Le point E défini à la question précédente est sur les trois plans médiateurs, donc (d'après la question **3.a**) :
AE = BE = CE = DE.

Ainsi, les points A, B, C et D sont sur la sphère de centre E, de rayon $AE = \sqrt{\frac{27}{4}}$