1- Après avoir donné un équivalent simple de $f(x)$ en a, calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dans les cas suivants :

i) $f(x)=\dfrac{(1-\cos(x))\tan(2x)}{\sin^2(3x)}$ en $a=0$

$$\frac{(1-\cos(x))\tan(2x)}{\sin^2(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right)\times 2x}{(3x)^2} \text{ d'où } f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{9} \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

ii) $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}$ en $a=1$

$$\frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} \underset{x=1+h}{=} \frac{-\sin(\pi h)}{\ln(1+h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-\pi h}{h} \text{ d'où } f(x)\underset{x\to 1}{\sim}-\pi \text{ et } \lim_{x\to 1} f(x)=-\pi$$

2- Calculer les développements limités suivants, au voisinage de $a=0$:

i) $\mathrm{DL}_5(\mathrm{ch}(x)\sin(x)) = x+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{30}x^5+o_0(x^5)$

ii) $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{e^x}{1+\ln(1-x)}\right) = 1+2x+3x^2+\dfrac{9}{2}x^3+o_0(x^3)$

iii) $\mathrm{DL}_5\left(\cos\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\right) = 1-\dfrac{1}{2}x^2+x^3-\dfrac{35}{24}x^4+\dfrac{11}{6}x^5+o_0(x^5)$

iv) $\mathrm{DL}_2\left(\sqrt{e^x}\right) = 1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{8}x^2+o_0(x^2)$

3- En utilisant le théorème de Taylor Young, calculer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 2 de $\tan(\pi x)$.

$$\tan(\pi x)=\pi(x-2)+\frac{\pi^3}{3}(x-2)^3+o_2\left((x-2)^3\right)$$

C.B. N° 9	DEVELOPPEMENTS LIMITES	Correction

1- Après avoir donné un équivalent simple de $f(x)$ en a, calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dans les cas suivants :

i) $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)\tan(4x)}{1-\cos(3x)}$ en $a=0$

$$\frac{\sin(x^2)\tan(4x)}{1-\cos(3x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2\times 4x}{1-\left(1-\frac{1}{2}(3x)^2\right)} \text{ d'où } f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{8x}{9} \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

ii) $f(x)=\dfrac{\cos(\pi x)}{1-\sqrt{2x}}$ $a=\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\cos(\pi x)}{1-\sqrt{2x}} \underset{x=h+\frac{1}{2}}{=} \frac{-\sin(\pi h)}{1-\sqrt{1+2h}} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{-\pi h}{1-\left(1+\frac{2h}{2}\right)} \text{ d'où } f(x)\underset{x\to\frac{1}{2}}{\sim}\pi \text{ et } \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\pi$$

2- Calculer les développements limités suivants, au voisinage de $a = 0$:

i) $\mathrm{DL}_5(\mathrm{sh}(x)\cos(x))$ $= x-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{30}x^5+o_0(x^5)$

ii) $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{e^x}{1-\ln(1+x)}\right)$ $=1+2x+2x^2+\dfrac{3}{2}x^3+o_0(x^3)$

iii) $\mathrm{DL}_5\left(\sin\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right)$ $= x+x^2+\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{120}x^5+o_0(x^5)$

iv) $\mathrm{DL}_2\left(\sqrt{1+\ln(1+x)}\right)$ $=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{8}x^2+o_0(x^2)$

3- En utilisant le théorème de Taylor Young, calculer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 1 de $\mathrm{Arc}\tan(x)$.

$$\mathrm{Arc}\tan(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3+o_1\left((x-1)^3\right)$$