CC N° 1 Math. Sup. 2011-2012 2 h

I) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \text{Arccos}\left(\text{th}\, x\right) + \text{Arctan}\left(\text{sh}\, x\right) \quad .$$

1) Donner les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions th et sh.
2) Donner les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions Arccos et Arctan.
3) Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de f.
4) Donner une formule reliant th^2 et ch^2.
5) Calculer la dérivée de f.
6) En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.
7) Résoudre l'équation : $\text{th}\, x = \dfrac{5}{13}$ (On donnera la ou les solution(s) à l'aide de la seule fonction logarithme népérien) .
8) A l'aide de ce qui précède, calculer : $A = \text{Arccos}\dfrac{5}{13} + \text{Arctan}\dfrac{5}{12}$.

II)

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_0) : $z^3 + 15z^2 + 15z + 1 = 0$, sachant qu'il y a une solution évidente.

b) A l'aide de la formule du binôme, développer $Q(z) = (z + 1)^6 + (z - 1)^6$.

c) Déduire de ce qui précède les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_1) : $Q(z) = 0$.

2. a) Donner les racines sixièmes de -1.

b) Soit θ un réel. Mettre les nombres complexes $z_1 = e^{i\theta} + 1$ et $z_2 = e^{i\theta} - 1$ sous la forme $\rho e^{i\omega}$, où ρ et ω sont des réels.

c) Après avoir justifié que l'équation (E_1) équivaut à $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^6 = -1$, donner à l'aide des questions précédentes, les solutions de l'équation (E_1) sous une autre forme qu'à la question **1**.

3. Déduire de ce qui précède la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

III) Soit cotan la fonction définie par : $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. **1)** Sur quels ensembles cotan est-elle définie, continue, dérivable ?
2. **2)** Justifier l'existence de Arccotan, la fonction réciproque de cotan sur $]0,\pi[$, et donner son ensemble de définition D.
3. **3)** Déterminer D' le domaine de dérivabilité de Arccotan et calculer sa dérivée.
4. **4)** Tracer sa courbe représentative.
5. **5)** Vérifier que : $\forall x \in$ D, Arccotan x + Arctan x = $\dfrac{\pi}{2}$.

IV)

1. **1)** Exprimer sh(3x) en fonction de sh(x).
2. **2)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\operatorname{Argsh}(4x^3 + x^2 - 2x - 14) = 3\operatorname{Argsh}(x)$.

V)

1. Soit (a ; c) $\in \mathbb{C}^2$, on pose z = ac.

a) Exprimer, à l'aide de z uniquement, la quantité : $\dfrac{1}{2}\left|\bar{c}-a\right|^2 - \dfrac{1}{2}\left(|c|-|a|\right)^2$.

b) Montrer que, si $\left|\bar{c}-a\right| \leq 1$, alors $|z| - \operatorname{Re}(z) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Etude d'un exemple :

On pose, dans cette question, z = $\dfrac{i}{2}$ et a = $\alpha(1+i)$ où $\alpha \in \,]0;+\infty[$.

a) Donner la forme algébrique de c$\in \mathbb{C}$ tel que z = ac.

b) Déterminer α, à l'aide de la question **(1.b)**, pour que $\left|\bar{c}-a\right| = 1$.

Barème envisagé : I = 6 points , II = 7 points , III = 4 points , IV = 3 points , V = 3 points .
