Correction CC N° 1	Math. Sup. 2011-2012

I) $f(x) = \operatorname{Arccos}(\operatorname{th} x) + \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$.

1) th et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
2) Arccos est définie sur [-1 ; 1] et dérivable sur]-1 ; 1[, Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$.
4) $\dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$
5) $f'(x) = 0 \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$
6) $f(x) = f(0) = \dfrac{\pi}{2} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}.$
7) $\operatorname{th} x = \dfrac{5}{13} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x} + 5 \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{18}{8} \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right).$
8) $A = \operatorname{Arccos}\dfrac{5}{13} + \operatorname{Arctan}\dfrac{5}{12} = f\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \dfrac{\pi}{2}$

car : $sh\left(\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \dfrac{e^{\ln\frac{3}{2}} - e^{-\ln\frac{3}{2}}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2} = \dfrac{5}{12}$.

II)

1. a) La solution évidente est -1.
$z^3 + 15z^2 + 15z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + 1)(z^2 + 14z + 1) = 0.$
Les solutions de (E_0) sont : -1 ; $4\sqrt{3}-7$; $-4\sqrt{3}-7$.

b) $Q(z) = 2z^6 + 30z^4 + 30z^2 + 2.$

c) $Q(z) = 0 \ \Leftrightarrow \ z^2 \in \left\{-1; 4\sqrt{3}-7; \ -4\sqrt{3}-7\right\} \Leftrightarrow$

$z \in \left\{ i; -i; \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)i; -\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)i; \ \left(\sqrt{4\sqrt{3}+7}\right)i; -\left(\sqrt{4\sqrt{3}+7}\right)i \right\}.$

2. a) $\left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)} / k \in [\![0;5]\!] \right\} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}; e^{i\frac{\pi}{2}}; e^{i\frac{5\pi}{6}}; e^{i\frac{7\pi}{6}}; e^{i\frac{9\pi}{6}}; e^{i\frac{11\pi}{6}} \right\}$

b) $z_1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

c) 1 n'est pas solution de (E_1), l'équation est donc équivalente à $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^6 = -1$.

z est donc solution de (E_1) si et seulement si il existe $k \in [\![0;5]\!]$ tel que $\dfrac{z+1}{z-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}$,

ce qui équivaut à $z = \dfrac{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}+1}{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)}-1} = -i\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{12}\right)}$.

Les solutions sont : $\left\{-i\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{12}\right)} / k \in [\![0;5]\!]\right\}$

3. En identifiant les solutions trouvées à la question **1c)** et à la question précédente, sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est positif et que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) < \tan\left(\frac{3\pi}{12}\right) < \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ on trouve :

$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{4\sqrt{3}+7}}$.

III) Soit cotan la fonction définie par : $\mathrm{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

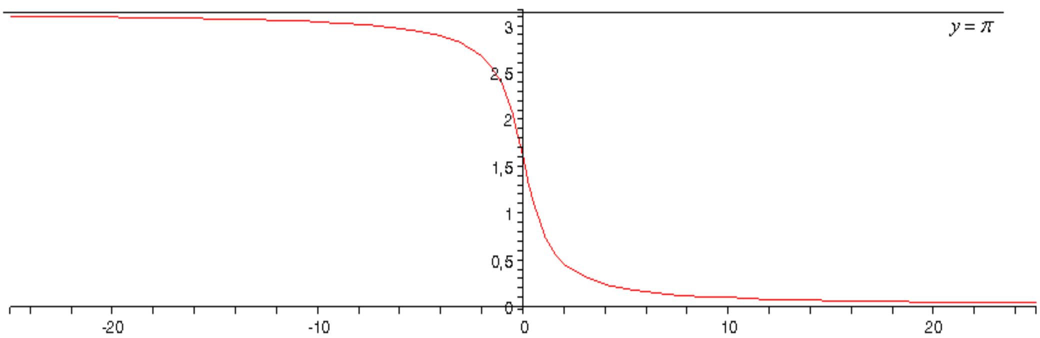
1) cotan est définie, continue et dérivable sur $]0,\pi[$ modulo$[\pi]$.

2) cotan réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet une bijection réciproque Arccotan définie sur D = $\mathbb{R}$.

3) D' = $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Arccotan}'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

car : $1 = \mathrm{Arccotan}'(x)\,\mathrm{cotan}'(\mathrm{Arccotan}(x))$.

4) Courbe représentative :



5) $\forall x \in \mathbb{R}$ = D, Arccotan x + Arctan x = Arccotan (0) + Arctan (0) = $\dfrac{\pi}{2}$,

car : Arccotan' x + Arctan' x = 0 , $\forall x \in \mathbb{R}$.

IV)

1) sh(3x)=sh(2x+x)=sh(2x)ch(x)+ch(2x)sh(x)=2sh(x)ch^2(x)+ sh(x)(ch^2(x)+sh^2(x))
=2sh(x)(1+sh^2(x))+sh(x)(1+2sh^2(x))=3sh(x)+4sh^3(x).

2) Argsh($4x^3 + x^2 - 2x - 14$) = 3Argsh(x)
$\Leftrightarrow$ $4x^3 + x^2 - 2x - 14$ = sh(3Argsh(x)) = $3x + 4x^3$ car sh bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5x - 14 = 0$ $\Leftrightarrow$ (x = -2 ou x = 7).

V)

1. a) $\frac{1}{2}\left|\bar{c}-a\right|^2-\frac{1}{2}\left(|c|-|a|\right)^2=\frac{1}{2}\left(\bar{c}-a\right)\overline{\left(\bar{c}-a\right)}-\frac{1}{2}\left(c\bar{c}-2|ac|+a\bar{a}\right)=|z|-\mathrm{Re}(z)$.

b) Si $\left|\bar{c}-a\right|\le 1$, alors $\frac{1}{2}\left|\bar{c}-a\right|^2\le\frac{1}{2}$. Comme $-\frac{1}{2}\left(|c|-|a|\right)^2\le 0$, on a :

$|z|-\mathrm{Re}(z)\le\frac{1}{2}$.

2. a) c = $\frac{1+i}{4\alpha}$.

b) On constate que $|z|-\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$, donc $\left|\bar{c}-a\right|=1$ si et seulement si $\left(|c|-|a|\right)^2=0$

ce qui équivaut à $\frac{\sqrt{2}}{4\alpha}=\alpha\sqrt{2}$ ce qui équivaut (α étant positif) à $\alpha=\frac{1}{2}$.