CC N° 2 Math. Sup. 2011-2012 2 h

I) *Partie A*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels qui converge vers 0.

On pose : $\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k,\quad a_n = S_{2n}\quad$ et $\quad b_n = S_{2n+1}$.

1) **a)** Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Etudier la nature de la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ k_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Partie B

1) **a)** Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad 1-\frac{1}{x}\le \ln(x)\le x-1$.

b) En déduire que : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{p+1}\le \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$.

2) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n\le \ln(2)\le v_n+\frac{1}{2n}$.

b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et déterminer sa limite.

3) a) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, simplifier l'expression $v_{p+1}-v_p$.

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

4) Déduire de ce qui précède la valeur de la limite de la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

II) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Etudier et construire la courbe (C) d'équation polaire $\rho=\left(\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^3$.

2) On note $\overrightarrow{T(\theta)}$ un vecteur directeur de la tangente à la courbe (C) au point $M(\theta)$ d'angle polaire θ. Montrer que $\left(\overrightarrow{OM(\theta)};\overrightarrow{T(\theta)}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[\pi]$.

3) Une droite passant par l'origine recoupe la courbe en trois points.
Montrer que les tangentes à (C) en ces trois points forment un triangle équilatéral.

Barème envisagé : I = 14 points , II = 8 points.
