Correction CC N° 2	**Math. Sup. 2011-2012**

I) ***Partie A***

1) a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante, $\forall n\in\mathbf{N}$: $a_{n+1}-a_n = u_{2n+2}-u_{2n+1}<0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, et $b_{n+1}-b_n = -u_{2n+3}+u_{2n+2} > 0$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
De plus, $\forall n\in\mathbf{N}$ $b_n - a_n = - u_{2n+1}$ donc $(b_n - a_n)_n$ converge vers 0.

b) Les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc elles convergent et ont la même limite. On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers 0. $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $k_n = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k$. D'après la question précédente, la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Partie B

1) a) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$, par : $f(x)=\ln(x)-1+\frac{1}{x}$ et $g(x)=\ln(x)-x+1$.

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$:
$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$ et $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	**0**	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	**0**	$\searrow$	

On en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $g(x) \leqslant 0 \leqslant f(x)$
d'où : $1-\frac{1}{x}\le \ln(x)\le x-1$.

b) On en déduit que : $\forall p\in\mathbf{N}^*$, $1-\frac{1}{1+\frac{1}{p}}\le \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\le 1+\frac{1}{p}-1$, ou: $\frac{1}{1+p}\le \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$.

2) a) $\forall n\in\mathbf{N}^*$, on pose $p = n + k – 1$ dans l'encadrement précédent :
$\frac{1}{n+k}\le \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)\le\frac{1}{n+k-1}$, on somme membres à membres :
$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$ d'où : $v_n \le \ln(2n)-\ln(n)\le\frac{1}{n}+v_n-\frac{1}{2n}$
D'où : $v_n\le\ln(2)\le v_n+\frac{1}{2n}$.

b) On déduit de la question précédente que $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\ln(2)-\frac{1}{2n}\le v_n\le\ln(2)$.

Le théorème des gendarmes donne la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ln(2).

3) a) Pour tout $p\in\mathbf{N}^*$, $v_{p+1}-v_p = \frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+2}=\frac{1}{(2p+1)(2p+2)}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose P(n) : « $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ».

$v_1 = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ donc P(1) est vraie.

Soit n $\in \mathbb{N}^*$, on suppose P(n) vraie.

On a : $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ P(n+1) est donc vraie.

Par principe de récurrence, P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = k_{2n}$ donc la limite de $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ln(2).

II) **1)** On note *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \left(\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^3$.

f est impaire, de période 6π, et $\forall \theta$, $f(\theta + 3\pi) = -f(\theta)$ (3π est une antipériode).

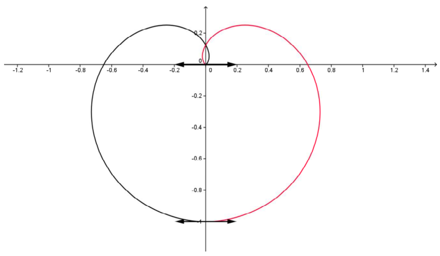
On étudie donc *f* sur $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$, et on effectue une symétrie d'axe (Oy).

$\forall \theta$, $f'(\theta) = \left(\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)^2 \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

θ	0		$3\pi/2$
$f'(\theta)$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

En O, la tangente est dirigée par $\vec{u}(0)$ elle est donc horizontale.

Pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, la tangente est dirigée par $\vec{v}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, elle est donc horizontale.



2) Pour $\theta \equiv 0[3\pi]$: $f(\theta) = f'(\theta) = 0$, donc $\overrightarrow{T(\theta)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u(\theta)} = \pm\vec{i}$.

$\left(\overrightarrow{OM(\theta)}, \overrightarrow{T(\theta)}\right) \equiv 0 \equiv \frac{\theta}{3}[\pi]$.

Pour $\theta \equiv \frac{3\pi}{2}[3\pi]$: $f'(\theta) = 0$, donc $\overrightarrow{T(\theta)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v(\theta)} = \pm\vec{i}$. $\left(\overrightarrow{OM(\theta)}, \overrightarrow{T(\theta)}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\theta}{3}[\pi]$

Sinon, on a : $\tan\left(\overrightarrow{OM(\theta)}; \overrightarrow{T(\theta)}\right) = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{\sin(\theta/3)}{\cos(\theta/3)} = \tan\left(\frac{\theta}{3}\right)$. D'où le résultat.

3) 3π étant une antipériode, une droite passant par l'origine recoupe la courbe en trois points : M(θ), M(θ+2π) et M(θ+3π).

D'après la question précédente , à π-près :

$$\left(\overrightarrow{T(\theta)}; \overrightarrow{T(\theta+2\pi)}\right) \equiv \left(\overrightarrow{T(\theta)}; \overrightarrow{OM(\theta)}\right) + \left(\overrightarrow{OM(\theta)}; \overrightarrow{OM(\theta+2\pi)}\right) + \left(\overrightarrow{OM(\theta+2\pi)}; \overrightarrow{T(\theta+2\pi)}\right) \equiv -\frac{\theta}{3} + \frac{\theta+2\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$$

et, de même: $\left(\overrightarrow{T(\theta+2\pi)}; \overrightarrow{T(\theta+3\pi)}\right) \equiv -\frac{\theta+2\pi}{3} + \frac{\theta+3\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi]$

On en déduit que les tangentes en ces trois points forment un triangle équilatéral.