CC N° 3	Math. Sup. 2011-2012	2 h

I Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\text{Arctan}\, x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1°) Montrer que f est continue et dérivable en 0, déterminer une équation de la tangente en ce point à la courbe C_f et déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente.

2°) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer f'(x). On pose $h(x) = x^2 f'(x)$. Etudier rapidement h et en déduire le tableau de variation de f.

3°) Achever l'étude de f et tracer sa courbe représentative.

On note $F(x) = \int_0^x f(t)dt$; on définit g par : $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4°) **a)** Montrer que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
b) Déterminer le développement limité d'ordre 3 de F en 0 ; en déduire qu'il existe α tel que g soit continue et dérivable en 0 ; préciser g'(0).

Dans toute la suite on prendra cette valeur pour α.

5°) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 g'(x) + xg(x) = \text{Arctan}\, x$.

6°) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x)F'(x) \leq \dfrac{\pi}{2} g(x)$

7°) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq \pi \int_0^x g(t)dt$.

II Soit **(**E ; +) un groupe. On dit qu'un endomorphisme de E est un projecteur si p*o*p = p.
Soient *f* et *g* deux projecteurs.

1°) Montrer les équivalences suivantes :

a) (Im(*f*) = Im(*g*)) $\Leftrightarrow$ (*f o g* = *g* et *g o f* = *f*).

b) (Ker(*f*) = Ker(*g*)) $\Leftrightarrow$ (*f o g* = *f* et *g o f* = *g*).

2°) Montrer l'équivalence entre les trois propositions :
i) *f* + *g* est un projecteur
ii) *f o g* = -*g o f*
iii) *f o g* = *g o f* = 0

3°) On suppose que *f* et *g* commutent.
a) Montrer que *f o g* est un projecteur.
b) Montrer que Im(*f o g*) = Im(*f*) $\cap$ Im(*g*)

4°) On suppose que Im(*f o g*) $\subset$ Im(*g*) et Ker(*g*) $\subset$ Ker(*g o f*).
Montrer que *f* et *g* commutent.

III On munit $E = \mathbb{R}^+$ de la loi * telle que : $\forall (x;y) \in E^2$, $x*y = \ln(e^x + e^y - 1)$.

a) Montrer que * est une loi interne sur E.

b) Etudier la commutativité, l'associativité, l'existence d'un neutre et de symétriques pour * sur E.

Barème envisagé : I = 10 points , II = 8 points, III = 4
