**CC N° 3 Math. Sup. 2011-2012 Correction**

**I** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc}\tan x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

**1°)** $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{3} + o_0\left(x^2\right)$ donc f est continue et dérivable en 0, admet la droite d : y = 1 pour tangente en ce point à la courbe $C_f$ et la courbe est sous cette tangente.

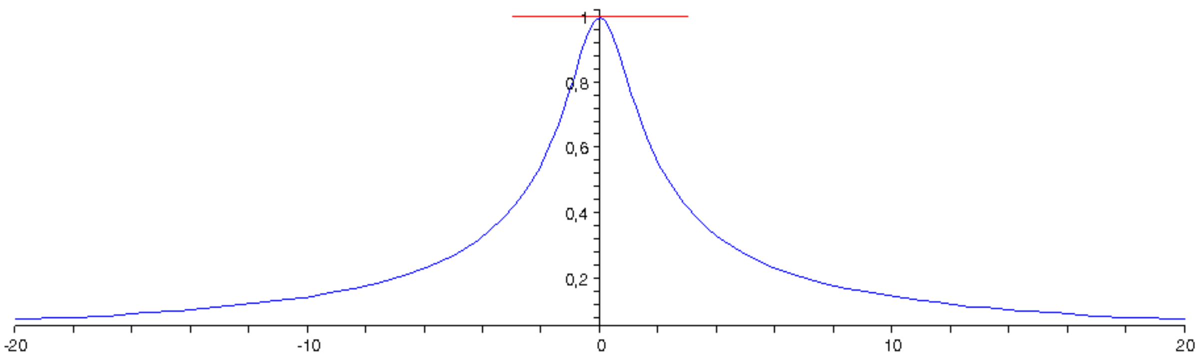
**2°)** Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x}{x^2}$ et f '(0) = 0, donc $h(x) = x^2 f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan} x$.

$h'(x) = \dfrac{-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \leq 0$, d'où les tableaux de variation de h et de f :

| x | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| h | $\dfrac{\pi}{2}$ | ↘ 0 ↘ | $-\dfrac{\pi}{2}$ |

| x | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| f | 0 ↗ | 1 | ↘ 0 |

**3°)** Courbe représentative :




On note $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ ; on définit g par : $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = \alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$.

**4°) a)** f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

**b)** $F(x) = x - \dfrac{x^3}{9} + o_0\left(x^3\right)$ ; donc il existe $\alpha = 1$ tel que g continue et dérivable en 0 avec g'(0)=0.

**5°)** $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 g'(x) + x g(x) = x^2\left(\dfrac{xf(x) - F(x)}{x^2}\right) + x\dfrac{F(x)}{x} = xf(x)$ = Arctan x.

Pour x = 0 cette égalité reste vraie, elle est donc vraie pour tout réel x.

**6°)** $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x)F'(x) = xg(x)(g(x) + xg'(x)) = g(x)(xg(x) + x^2g'(x))$

$$= g(x)\text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}g(x)$$

**7°)** $\forall x \in \mathbb{R}^+$, en intégrant sur [0, x] l'inégalité précédente, on obtient :

$$\int_0^x F(t)F'(t)dt \leq \frac{\pi}{2}\int_0^x g(t)dt \Rightarrow \frac{(F(x))^2}{2} \leq \frac{\pi}{2}\int_0^x g(t)dt \quad \text{car } F(0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \leq \pi\int_0^x g(t)dt$$

# II **1°) a)**

- Supposons Im($f$) = Im($g$).

Soit x∈ E. $g(x) \in \text{Im}(g) = \text{Im}(f)$ donc $\exists y \in E \,/\, g(x) = f(y)$. On a : $f\, o\, g(x) = f\, o\, f(y) = f(y) = g(x)$, d'où $f\, o\, g = g$. De même $g\, o\, f = f$.

- Réciproquement, si $f\, o\, g = g$ alors $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$,
  si de plus $g\, o\, f = f$, alors $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$.

**b)**

- Supposons Ker($f$) = Ker($g$).

Soit x∈ E. $x - g(x) \in \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f)$ donc $f(x - g(x)) = 0$, donc $f(x) = f\, o\, g(x)$.
De même $g\, o\, f = g$.

- Réciproquement, si $f\, o\, g = f$ alors $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$,
  si de plus $g\, o\, f = g$, alors $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

**2°)**

- ($f + g$ est un projecteur )
  $\Leftrightarrow$ ( $f + g = (f + g)\, o\, (f + g) = f^2 + f\, o\, g + g\, o\, f + g^2 = f + f\, o\, g + g\, o\, f + g$)
  $\Leftrightarrow$ ( $f\, o\, g + g\, o\, f = 0$).
  Donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

- Si $f\, o\, g = -\, g\, o\, f$, alors en composant par $f$ à gauche on a : $f\, o\, f\, o\, g = -\, f\, o\, g\, o\, f$ donc $f\, o\, g = -\, f\, o\, g\, o\, f$, et en composant par $f$ à droite, on a : $f\, o\, g\, o\, f = -\, g\, o\, f\, o\, f$ donc $f\, o\, g\, o\, f = -\, g\, o\, f$.
  On a donc $f\, o\, g = g\, o\, f = -\, g\, o\, f$, d'où $f\, o\, g = g\, o\, f = 0$.
  Réciproquement, si $f\, o\, g = g\, o\, f = 0$, on a bien $f\, o\, g = -\, g\, o\, f$.
  Donc (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

- Par transitivité de la relation d'équivalence, on a aussi (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

**3°)** Si $f$ et $g$ commutent :

**a)** $(f\, o\, g)\, o\, (f\, o\, g) = f\, o\, f\, o\, g\, o\, g = f\, o\, g$ donc $f\, o\, g$ est un projecteur.

**b)** On a toujours $\text{Im}(f\, o\, g) \subset \text{Im}(f)$, et comme $f$ et $g$ commutent, $\text{Im}(f\, o\, g) = \text{Im}(g\, o\, f) \subset \text{Im}(g)$, donc $\text{Im}(f\, o\, g) \subset \text{Im}(f) \bigcap \text{Im}(g)$.

Si $x \in \text{Im}(f) \bigcap \text{Im}(g)$, $\exists (a;b) \in E^2$ tel que $x = f(a) = g(b)$.

On a donc : $x = f\, o\, f(a) = f(a) = f\, o\, g(b)$ donc $x \in \text{Im}(f\, o\, g)$. Donc $\in \text{Im}(f) \bigcap \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f\, o\, g)$.

En conclusion : $\text{Im}(f\, o\, g) = \text{Im}(f) \bigcap \text{Im}(g)$

**4°)** On suppose que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
Soit $x \in E$. $f \circ g(x) \in \mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(g)$, donc $\exists y \in E$ tel que $f \circ g(x) = g(y)$.
On a : $g \circ f \circ g(x) = g(y) = f \circ g\,(x)$.
D'autre part, $g(x) - x \in \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ donc $g \circ f\,(g(x)) = g \circ f(x)$.
Finalement: $f \circ g(x) = g \circ f(x)$.

**III** On munit $E = \mathbb{R}^+$ de la loi * telle que : $\forall (x;y) \in E^2$, $x*y = \ln(e^x + e^y - 1)$.

**a)** $\forall (x;y) \in E^2$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$ donc $e^x + e^y - 1 \geq 1$ et $x*y \geq 0$. La loi est donc interne.

**b)** La commutativité est évidente.

Soient x, y et z dans E.

$(x*y)*z = \ln(e^x + e^y - 1))*z = \ln\left(e^{\ln(e^x+e^y-1)} + e^z - 1\right) = \ln(e^x + e^y - 1 + e^z - 1) = \ln(e^x + e^y + e^z - 2)$.

Par symétrie, on a également $x * (y * z) = \ln(e^x + e^y + e^z - 2)$.
La loi * est donc associative.

$\forall x \in E$, $x*0 = 0*x = x$ donc 0 est le neutre pour la loi *.

Soit $x \in E$. $x*x' = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x + e^{x'} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x + e^{x'} - 1 = 1 \Leftrightarrow e^{x'} = 2 - e^x$.
On en déduit que x admet un symétrique pour la loi * si et seulement si $2 - e^x > 0$, c'est-à-dire $0 \leq x < \ln(2)$. Alors le symétrique de x est $\ln(2 - e^x)$.