CC N° 4 Math. Sup. 2011-2012 2 h

I On se place dans le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1°) Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E, et en donner une base :
$F_1 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$;
$F_2 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$.

2°) Soit F_3 un supplémentaire de F_2 dans E. Donner une base de F_3, de $F_1 \cap F_3$ et de $F_1 + F_3$.

II On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{Z}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soient a_1 et a_2 des nombres réels non nuls.
Soit F l'ensemble des éléments *f* de E vérifiant la condition :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \qquad \left(f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0 \right)$$

1°) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2°) Si *a* et *b* sont deux réels quelconques, montrer qu'il existe un unique élément *f* de F tel que $f(1) = a$ et $f(2) = b$.

3°) Soient φ_1 la fonction de F définie par $\varphi_1(1) = 1$ et $\varphi_1(2) = 0$, et φ_2 la fonction de F définie par $\varphi_2(1) = 0$ et $\varphi_2(2) = 1$.
Montrer que la famille $\{ \varphi_1 ; \varphi_2 \}$ est une base de F.

4°) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α , pour que la fonction *f* définie pour tout *n* de $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \alpha^n$ soit dans F.

5°) On suppose que $a_1^2 > 4a_2$.
Montrer que si α et β sont deux réels distincts, les fonctions *f* et *g* définies pour tout *n* de $\mathbb{Z}$ par $f(n) = \alpha^n$ et $g(n) = \beta^n$ sont linéairement indépendantes.
En déduire une nouvelle base de F.

6°) On suppose que $a_1^2 = 4a_2$.
Montrer que pour $\gamma = -\dfrac{a_1}{2}$, la fonction *h* définie pour tout *n* de $\mathbb{Z}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F.
Trouver une nouvelle base de F.

III Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n$

1°) Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de A_n par $(X - 1)$.

2°) Soit $S_n = nX^n - X^{n-1} - \ldots - X - 1$.

a) Montrer que S_n est divisible par $(X - 1)$

b) Déterminer le quotient de $X^{n+1} - 1$ par $(X - 1)$

c) En calculant de deux façons différentes le polynôme dérivé de $X^{n+1} - 1$, déterminer le quotient dans la division euclidienne de S_n par $(X - 1)$

3°) Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de A_n par $(X - 1)^2$

IV Calculer les intégrales suivantes :

1°) $I_1 = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x} \right) dx$ et $I_2 = \int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$

2°) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^6 t + \tan^5 t + 3\tan^4 t + 5\tan^3 t + \tan^2 t + 2\tan t + 1}{\left(\tan^2 t + \tan t\right)\left(\tan^2 t + 1\right)} \left(1 + \tan^2 t\right) dt$.

Barème : I = 4 points , II = 8 points , III = 6 points , IV = 4 points .
