CC N° 4 Math. Sup. 2011-2012 Correction

I 1°) $F_1 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\} = \{(y + z ; y ; z) \ / \ (y ; z) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \text{Vect}\{(1 ; 1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 1)\}$

$F_2 = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\} = \{(0 ; y ; y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$
$= \text{Vect}\{(0 ; 1 ; 1)\}$.

2°) On vérifie rapidement que la famille $\{(1 ; 1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 1) ; (0 ; 1 ; 1)\}$ est une famille libre de E. Comme dim(E) = 3, c'est une base.
Ainsi on peut prendre $F_3 = F_1$. Alors $F_1 \cap F_3 = F_1$ et $F_1 + F_3 = F_1$.

Remarque : Il existe d'autres supplémentaires de F_2 dans E. On a :
$\dim(F_1 + F_3) = \dim(F_1) + \dim(F_3) - \dim(F_1 \cap F_3) = 4 - \dim(F_1 \cap F_3) < 4$.
Si F_3 est différent de F_1, alors on a nécessairement $\dim(F_1 \cap F_3) = 1$, et $F_1 + F_3 = E$.

II 1°) Soient f et g deux éléments de F et λ un réel.

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \qquad \begin{pmatrix} (f + \lambda g)(n) + a_1 (f + \lambda g)(n-1) + a_2 (f + \lambda g)(n-2) = \\ f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \lambda\big(g(n) + a_1 g(n-1) + a_2 g(n-2)\big) = 0 \end{pmatrix}$$

De plus, la fonction constante égale à 0 est dans F.

2°) Si une fonction f de F vérifie $f(1) = a$ et $f(2) = b$, alors on a nécessairement $f(3) = -a_1 f(2) - a_2 f(1)$ et définissant de proche en proche f jusqu'à $n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$), on a nécessairement : $f(n) = -a_1 f(n-1) - a_2 f(n-2)$.
De même, on construit f sur les négatifs de proche en proche en prenant pour tout entier naturel n : $f(-n) = -\dfrac{1}{a_2}\big(a_1 f(-n+1) + f(-n+2)\big)$
La fonction f construite ainsi est bien dans F, et c'est la seule vérifiant les conditions voulues.

3°) Soit $(\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0$. Alors, $\lambda\varphi_1(1) + \mu\varphi_2(1) = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $\lambda\varphi_1(2) + \mu\varphi_2(2) = 0$ d'où $\mu = 0$. La famille $\{\varphi_1 ; \varphi_2\}$ est donc une famille libre de F.
De plus pour tout fonction f de F, on a :
$f(1) = (f(1)\varphi_1(1) + f(2)\varphi_2(1))$ et $f(2) = (f(1)\varphi_1(2) + f(2)\varphi_2(2))$.
Les fonctions de F étant définies par leurs valeurs en 1 et 2, on a :
$f = f(1)\varphi_1 + f(2)\varphi_2$. La famille $\{\varphi_1 ; \varphi_2\}$ est donc une famille génératrice de F.
En conclusion, la famille $\{\varphi_1 ; \varphi_2\}$ est une famille base de F.

4°) Si f est dans F, on a pour tout n de $\mathbb{Z}$: $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} = 0$ donc $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$.
La réciproque est immédiate, donc f est dans F si et seulement si α est solution de l'équation $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

5°) On suppose que $a_1^2 > 4a_2$, l'équation $x^2 + a_1x + a_2 = 0$ admet donc deux solutions réelles distinctes.
Soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f + \mu g = 0$.
Pour n = 0, on a : $\lambda + \mu = 0$, et pour n = 1, on a : $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$; donc $\lambda = -\mu$ et $\lambda(\alpha - \beta) = 0$.
Comme $\alpha \neq \beta$, on a : $\lambda = \mu = 0$. La famille {*f* ; *g*} est donc libre. Comme on a vu à la question 3°) que dim(F) = 2, {*f* ; *g*} est une base.

6°) On suppose que $a_1^2 = 4a_2$, l'équation $x^2 + a_1x + a_2 = 0$ admet donc pour unique solution $\gamma = -\dfrac{a_1}{2}$. Pour tout n de $\mathbb{Z}$ on a :

$$h(n) + a_1\, h(n-1) + a_2\, h(n-2) = (n-2)\gamma^{n-2}\left(\gamma^2 + a_1\gamma + a_2\right) + \gamma^{n-1}\left(2\gamma + a_1\right) = 0$$

h est donc dans F.
On sait que la fonction *k* définie pour tout *n* de $\mathbb{Z}$ par $k(n) = \gamma^n$ est dans F.
Soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda h + \mu k = 0$; pour n = 0, on a $\mu = 0$, et pour n = 1, on a : $\lambda = 0$.
La famille {*h* ; *k*} est donc libre. Comme dim(F) = 2, c'est une base de F.

III Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n$

1- $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n$: $\exists!\,(Q,R) \in (K[X])^2$ / $A_n = (X-1)Q + R$ avec $d°(R) < 1$, donc R constant et $A_n(1) = -1 = R$.
Alors : $A_n + 1 = nX^{n+1} - nX^n - X^n + 1 = nX^n(X-1) - (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)$
Donc $A_n = (X-1)(nX^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)) - 1$.

2- Soit $S_n = nX^n - X^{n-1} - \ldots - X - 1$.
   a) $S_n(1) = n - n = 0$, donc S_n est divisible par $(X - 1)$.
   b) $X^{n+1} - 1 = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \ldots + 1)$.
   c) En dérivant on obtient :
   $(n+1)X^n = X^n + X^{n-1} + \ldots + 1 + nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \ldots + 1$,
   donc : $S_n = nX^n - (X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)$
   $= (X - 1)(nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \ldots + 1)$

3- $A_n = (X-1)S_n - 1 = (X-1)^2(nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \ldots + 1) - 1$

IV 1- $I_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{x}\right)dx = \ln\left(\frac{6}{\sqrt{3}+1}\right) - \frac{\pi}{6} = \ln\left(3\left(\sqrt{3}-1\right)\right) - \frac{\pi}{6}$

$$I_2 = \int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\ln(7) - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Arctan}\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{6}$$

2- $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^6 t + \tan^5 t + 3\tan^4 t + 5\tan^3 t + \tan^2 t + 2\tan t + 1}{\left(\tan^2 t + \tan t\right)\left(\tan^2 t + 1\right)}\left(1 + \tan^2 t\right)dt$

$$\underset{du=(1+\tan^2 t)dt}{\overset{u=\tan t}{=}} \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} + I_1 = \frac{7}{3} - \sqrt{3}\,\frac{19}{27} + \ln\left(3\left(\sqrt{3}-1\right)\right) - \frac{\pi}{6}.$$