CC N° 5 Math. Sup. 2011-2012 2 h

I) Soit $E = \mathbb{R}_5[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On note E_1 l'ensemble des polynômes impairs de E et E_2 l'ensemble des polynômes pairs de E.

1- Justifier que $\{X^0 ; X^1 ; X^2 ; X^3 ; X^4 ; X^5\}$, $\{X^1 ; X^3 ; X^5\}$ et $\{X^0 ; X^2 ; X^4\}$ sont des bases de E, E_1 et E_2 respectivement.
2- Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
3- Montrer que l'application f qui à tout polynôme P de E_2 associe le polynôme f(P) défini par $f(P) = (X^2 + X^0)P'' - XP'$ est un endomorphisme de E_2.
4- Déterminer l'image par f de la base $\{X^0 ; X^2 ; X^4\}$ de E_2.
5- Déterminer Ker(f).
6- Déterminer $A = \{a \in \mathbb{R}$ tel que : $\exists P \in E_2 \backslash \{0\} \,/\, f(P) = a.P\}$.
7- Déterminer, pour tout a de A, l'ensemble $B_a = \mathrm{Ker}(f - a.\mathrm{Id}_E)$.
8- Montrer que l'application g qui à tout polynôme P de E_2 associe le polynôme g(P) défini par $g(P) = 2XP - P'$ est un homomorphisme de E_2 dans E_1.
9- Déterminer l'image par g de la base $\{X^0 ; X^2 ; X^4\}$ de E_2.
10- Montrer que g est un isomorphisme de E_2 sur E_1.

II) On considère un K-espace vectoriel noté E, et l'on note $S(E) = \{u \in L(E)$ tq $u^3 = u^2\}$

1- Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x ; y ; z) = (0 ; x ; z)$$

Montrer que $f \in S\left(\mathbb{R}^3\right)$ et déterminer Ker f et Im f.

On considère maintenant un endomorphisme u de $S(E)$.

2- Que peut-on dire de u si l'on suppose qu'il est inversible ?
3- On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$. Montrer que $u = \mathrm{id}$.
4- Soit $\lambda \in K \setminus \{0 ; -1\}$. Montrer que l'endomorphisme $v = u + \lambda\, \mathrm{id}E$ est inversible.
5- On suppose dans cette question que Ker u = Ker u^2. Montrer que u est un projecteur.

Dans la suite on suppose que Ker $u \neq \{0\}$ et que Ker $u \neq$ Ker u^2.

6- Déterminer pour $n \geq 3$, u^n. En déduire que : $E = \mathrm{Ker}\, u^2 \oplus \mathrm{Im}\, u^2$.
7- Montrer que Ker u^2 est stable par u et déterminer la restriction de u à Im u^2.
8- Soit v la restriction de u à Ker u^2. Montrer que v est nilpotent.

III) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 + \tan\left(y^4\right)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2- Montrer que $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.
3- Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
4- Que peut-on en conclure ?

Barème : I = 9 points , II = 8 points , III = 4 points .