# CC N° 5 Math. Sup. 2011-2012 Correction

## I)

1- $\{X^0 ; X^1 ; X^2 ; X^3 ; X^4 ; X^5\}$, $\{ X^1 ; X^3 ; X^5\}$ et $\{X^0 ; X^2 ; X^4\}$ sont des familles libres de E, $E_1$ et $E_2$ respectivement car les polynômes sont de degrés deux à deux différents. Les dimensions des espaces correspondant aux nombres d'éléments des familles, ce sont des bases

2- $E_1$ et $E_2$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E car la somme de leurs dimensions est la dimension de E et le seul polynôme pair et impair à la fois est le polynôme nul.

3- L'opérateur de dérivation étant linéaire, f est linéaire et P élément de $E_2$ implique f(P) élément de $E_2$ car $f(aX^4 + bX^2 + cX^0) = 8aX^4 + 12aX^2 + 2X^0$, donc f est un endomorphisme de $E_2$.

4- $f(X^0) = 0$ ; $f(X^2) = 2X^0$ ; $f(X^4) = 8X^4 + 12X^2$.

5- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X^0)$.

6- $A = \{a \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \exists P \in E_2\backslash\{0\} \,/\, f(P) = a.P\} = \{0 ; 8\}$.

7- $B_0 = \mathrm{Ker}(f)$ et $B_8 = \mathrm{Vect}\left\{\dfrac{2}{3}X^4 + X^2 + \dfrac{X^0}{4}\right\}$.

8- Pour $P = aX^4 + bX^2 + cX^0$ élément de $E_2$ on a :
$g(P) = g(aX^4 + bX^2 + cX^0) = 2aX^5 + 2bX^3 + 2cX - 4aX^3 - 2bX$ est élément de $E_1$
et g linéaire, donc g est un homomorphisme de $E_2$ sur $E_1$.

9- $g(X^0) = 2X$ ; $g(X^2) = 2X^3 - 2X$; $g(X^4) = 2X^5 - 4X^3$.

10- g est un isomorphisme de $E_2$ sur $E_1$ car il transforme une base en une base.

## II)

1- $f$ est clairement linéaire. $f^2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (0,0,z) \end{cases}$ ; $f^3$ est définie de la même façon.

Ker $f = \{(x ; y ; z) \in \mathbb{R}^3 / x = z = 0\} = \{(0 ; y ; 0) / y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{0 ; 1 ; 0\}$
et Im $f = \{(0 ; x ; z) / (x ; z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x.(0 ; 1 ; 0) + z.(0 ; 0 ; 1) / (x ; z) \in \mathbb{R}^2\}$
$= \mathrm{Vect}\{(0 ; 1 ; 0) ; (0 ; 0 ; 1)\}$

2- Si $u \in GL(E)$, notons $u^{-1}$ son inverse. Comme $u^2 \circ (u - \mathrm{id}) = 0$, en composant deux fois à gauche par $u^{-1}$, on trouve que $u - \mathrm{id} = 0$.

3- Soit $x \in E$. Comme $(u^3 - u^2)(x) = 0$, $u(u^2(x) - u(x)) = 0$ alors le vecteur $u^2(x) - u(x)$ est dans Ker $u$ et il est nul. Comme $u(u(x) - x) = 0$, $u(x) - x \in$ Ker $u$ et donc $u(x) = x$. Comme $x$ est arbitraire, on a bien $u = \mathrm{id}$.

4- On a $u = v - \lambda\,\mathrm{id}$ et puisque $u^3 = u^2$, on en tire une relation polynômiale satisfaite par $v$ :
$(v - \lambda\,\mathrm{id})^3 = (v - \lambda\,\mathrm{id})^2$ et en utilisant la formule du binôme ($v$ et id commutent), on trouve que
$v^3 + (-3\lambda - 1)v^2 + (3\lambda^2 + 2\lambda)v - (\lambda^3 + \lambda)\,\mathrm{id} = 0_{L(E)}$.

On en déduit que $v$ est inversible et que : $v^{-1} = \dfrac{1}{\lambda^3 + \lambda}\,(v^2 + (-3\lambda - 1)v + (3\lambda^2 + 2\lambda)\mathrm{id})$

5- Soit $x \in E$. Comme $u^3(x) = u^2(x)$, $u^2(u(x) - x) = 0$ et donc $u(x) - x \in$ Ker $u^2$.
Mais comme Ker $u^2$ = Ker $u$, $u(x) - x \in$ Ker $u$ et donc $u(u(x) - x) = 0$, donc $u^2(x) = u(x)$.
Comme $x$ est arbitraire, $u^2 = u$ et donc $u$ est un projecteur.

6- Comme $u^3 = u^2$, par récurrence on montre que $\forall n \geq 3$, $u^n = u^2$. Alors puisque $u^4 = u^2$, on en déduit que $u^2$ est un projecteur et d'après le cours que $E$ = Ker $u^2 \oplus$ Im $u^2$.

7- Soit $x \in$ Ker $u^2$. Alors $u(x) \in$ Ker $u^2$. Soit $x \in$ Im $u^2$. Il existe $x_0 \in E$ tel que $x = u^2(x_0)$.
Alors $u(x) = u^3(x_0) = u^2(x_0) = x$. Donc la restriction de $u$ à Im $u^2$ est l'identité de Im $u^2$.

8- Soit $x \in$ Ker $u^2$. $v^2(x) = u^2(x) = 0$. Par conséquent, $v^2 = 0$ et donc $v$ est nilpotent.

## III)

1- $f$ est continue sur $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$ comme sommes, produits et composées de fonctions continues.

De plus, $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^4\cos\theta\sin^3\theta + \tan\left(\rho^4\sin^4\theta\right)}{\rho^2}$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos\theta\sin^3\theta + \rho^4\sin^4\theta}{\rho^2} = 0 = f(0;0)$$

donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2- $(x;y) \neq (0;0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \dfrac{y^3\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(xy^3 + \tan\left(y^4\right)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ et

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x;y) = \dfrac{\left(3xy^2 + 4y^3\left(1+\tan^2\left(y^4\right)\right)\right)\left(x^2+y^2\right) - 2y\left(xy^3+\tan\left(y^4\right)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ . $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$ comme sommes, produits et composées de fonctions continues, donc $f \in C^1\left(\left(\mathbb{R}^2\right)^*\right)$. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t;0) - f(0;0)}{t} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)$, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0;t) - f(0;0)}{t} = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0;0)$

et $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x;y) = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^5}{\rho^4} h(\theta) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)$ avec $h$ fonction bornée (de même en y).

Donc $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

3- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t;0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0;0)}{t} = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0)$ et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0;t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0;0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^5}{t^4}}{t} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0).$$

4- Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0)$, donc $f \notin C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ d'après le théorème de Schwarz.