CC N° 1	Math. Sup. 2012-2013	2 h

I) Cet exercice a pour but de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres complexes solutions de l'équation $(E_m) : z^2 - 2mz + 1 = 0$ lorsque le paramètre m décrit $\mathbb{R}$.

i) Montrer que $z \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{2z} = \overline{\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)}$

ii) En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ que l'on représentera.

II) Soit u un nombre complexe différent de -1, de module 1 et d'argument θ.

1) Exprimer le nombre complexe $c = \dfrac{1-u}{1+u}$ sous forme trigonométrique et déterminer le module et un argument de c.

2) En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que :

$$\frac{2+iz}{2-iz} = u$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2 + iz)^5 = (2 - iz)^5$

4) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$\left(iz^2 + (2 - i)z - 2\right)^5 = \left(-iz^2 + (2 + i)z - 2\right)^5$$

III) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arc}\sin\left(\frac{\sqrt{2-x^2}+x}{2}\right)$$

1) Donner le domaine de définition de la fonction f

2) Calculer $f\left(\sqrt{2}\sin(\alpha)\right)$, pour $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

3) En déduire une expression simplifiée de f(x).

4) Retrouver ce résultat en dérivant f. (On pourra considérer $(f'(x))^2$).

IV) On considère la fonction sch définie par :

$$\text{sch}(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$$

1) Donner le domaine de définition de la fonction sch, et étudier ses limites aux bornes du domaine et ses variations.
2) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$ admet une application réciproque que l'on notera Argsch, et en donner le domaine de définition.

3) Donner le domaine de dérivabilité de Argsch, et calculer sa dérivée.

4) On pose y = sch(x). Exprimer x à l'aide de y, et en déduire une expression de la fonction Argsch.

5) Pour tout x de $[0;+\infty[$, on pose f(x) = Arccos(sch(x)).

   a) Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leq f(x) < \frac{\pi}{2}$
   b) Montrer que $\forall x \in [0;+\infty[,\ 1 + \tan^2(f(x)) = \text{ch}^2(x)$
   c) En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$.

Barème envisagé : I = 4 points , II = 5 points , III = 5 points , IV = 6 points .
