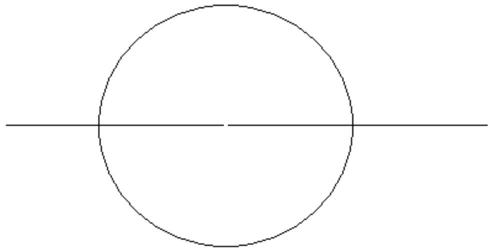
CC N° 1 Correction Math. Sup. 2012-2013 2 h

I) i) $z \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} \,/\, z^2+1 = 2mz \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{2z} = m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z^2+1}{2z} = \overline{\left(\dfrac{z^2+1}{2z}\right)}$

ii) On remplace z par x + iy et on obtient : y = 0 (avec $z \neq 0$) ou $x^2 + y^2 = 1$.

On a alors $\mathcal{E}$:



II) 1) $u = e^{i\theta} \Rightarrow c = \dfrac{1-u}{1+u} = -\tan\dfrac{\theta}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \tan\dfrac{\theta}{2} e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$\text{donc : } |c| = \left|\tan\frac{\theta}{2}\right| \text{ et (à } 2\pi\text{-près) } \arg(c) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \tan\dfrac{\theta}{2} < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{si } \tan\dfrac{\theta}{2} > 0 \end{cases}.$$

2) $\left(\dfrac{2+iz}{2-iz} = u\right) \Leftrightarrow \left(z = 2i\dfrac{1-u}{1+u}\right) \Rightarrow \left(z = 2\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$

$$\text{donc } |z| = \left|2\tan\frac{\theta}{2}\right| \text{ et (à } 2\pi\text{-près): } \arg(z) = \begin{cases} \pi & \text{si } \tan\dfrac{\theta}{2} < 0 \\ 0 & \text{si } \tan\dfrac{\theta}{2} > 0 \end{cases}$$

3) $(2 + iz)^5 = (2 - iz)^5 \Leftrightarrow \left(u^5 = 1\right) \Leftrightarrow \left(\theta = \dfrac{2k\pi}{5} \,/\, 0 \le k \le 4\right)$

$$S = \left\{2\tan\frac{k\pi}{5} \,/\, 0 \le k \le 4\right\}$$

4) $\left(\left(iz^2 + (2 - i)z - 2\right)^5 = \left(-iz^2 + (2 + i)z - 2\right)^5\right) \Leftrightarrow \left(\left(2+iz\right)^5\left(z-1\right)^5 = \left(2-iz\right)^5\left(z-1\right)^5\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\left(z-1\right)^5\left(\left(2+iz\right)^5 - \left(2-iz\right)^5\right) = 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ \text{ou} \\ \left(2+iz\right)^5 = \left(2-iz\right)^5 \end{cases}$$

$$S = \left\{2\tan\frac{k\pi}{5} \,/\, 0 \le k \le 4\right\} \cup \{1\}$$

III) 1) Pour que la racine carrée soit définie, il faut $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

La fonction Arc sin étant définie sur [-1 ; 1], il faut $\left|\dfrac{\sqrt{2-x^2}+x}{2}\right| \leq 1$

ce qui équivaut à $\left(\sqrt{2-x^2}+x\right)^2 \leq 4$ soit : $x\sqrt{2-x^2} \leq 1$

Si $x \leq 0$, c'est vérifié ;
sinon, cela équivaut à $x^2(2-x^2) \leq 1$ soit $0 \leq (x^2-1)^2$, qui est toujours vérifié.
Le domaine de définition de f est donc $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

2) $f\left(\sqrt{2}\sin(\alpha)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{\sqrt{2-2\sin^2(\alpha)}+\sqrt{2}\sin(\alpha)}{2}\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \begin{cases} \alpha+\dfrac{\pi}{4} & \text{pour } \alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \dfrac{3\pi}{4}-\alpha & \text{pour } \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

3) On en déduit: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{\pi}{4} & \text{pour } x \in \left[-\sqrt{2};1\right] \\ \dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) & \text{pour } x \in \left[1;\sqrt{2}\right] \end{cases}$

4) La fonction racine étant dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$, et la fonction Arc sin sur]-1 ; 1[, on en déduit que f est dérivable sur $\left]-\sqrt{2};1\right[\cup \left]1;\sqrt{2}\right[$

On a alors: $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-x}{\sqrt{2-x^2}}+1}{\sqrt{2-2x\sqrt{2-x^2}}} = \dfrac{-x+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}\times\sqrt{2-2x\sqrt{2-x^2}}}$ d'où : $(f'(x))^2 = \dfrac{1}{2-x^2}$

L'étude du signe du numérateur de f '(x) donne :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} & \text{si } x \in \left]-\sqrt{2};1\right[\\ \dfrac{-1}{\sqrt{2-x^2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} & \text{si } x \in \left]1;\sqrt{2}\right[\end{cases}$$

On en déduit, par continuité de f sur son domaine que :

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+C_1 & \text{pour } x\in\left[-\sqrt{2};1\right]\\ -\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+C_2 & \text{pour } x\in\left[1;\sqrt{2}\right]\end{cases}$$

Le calcul de f(1) donne les constantes C_1 et C_2, comme trouvées précédemment.

IV) 1) La fonction ch étant à valeurs dans $[1;+\infty[$ la fonction sch est définie sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{sch}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sch}(x)=0.$

La fonction ch étant décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$, positive, et la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit que sch est croissante sur $]-\infty;0]$, et décroissante sur $[0;+\infty[$

2) La fonction sch est continue, strictement décroissante de $[0;+\infty[$ sur $]0;1]$.

D'après le théorème de bijection, elle admet une application réciproque définie sur $]0;1]$

3) Notons D le domaine de dérivabilité de Argsch.

On a pour tout x de D : sch'(Argsch(x)) Argsch'(x) = 1, d'où :

$$\frac{-\operatorname{sh}(\operatorname{Argsch}(x))}{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argsch}(x))}\operatorname{Argsch}'(x)=1$$

Or pour tout réel x: ch(x) = $\dfrac{1}{\operatorname{sch}(x)}$ et pour tout réel positif : sh(x)=$\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)-1}$

$$\text{D'où, pour } x\in D: -x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\operatorname{Argsch}'(x)=1.$$

On en déduit que Argsch est dérivable sur]0 ; 1[, et sur cet intervalle :

$$\operatorname{Argsch}'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

4) $$\left(y=\operatorname{sch}(x)\right)\Leftrightarrow\left(y=\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)\Leftrightarrow\left(y\left(e^x\right)^2-2e^x+y=0\right)\underset{y\in\,]0;1]}{\Leftrightarrow}\left(e^x=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$$

Comme $x\in[0;+\infty[$, on en déduit : $x=\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$

5) a) Pour tout x de $[0;+\infty[$, sch(x) > 0, donc $\forall x\in[0;+\infty[,\ 0\le f(x)<\dfrac{\pi}{2}$

b) $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 1+\tan^2(f(x)) = \dfrac{1}{\cos^2(\text{Arc}\cos(\text{sch}(x))} = \dfrac{1}{\text{sch}^2(x)} = \text{ch}^2(x)$

c) $\forall x \in [0;+\infty[\quad \tan^2 f(x) = \text{ch}^2(x) - 1 = \text{sh}^2(x)$.

Comme $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \le f(x) < \dfrac{\pi}{2}$, on a: $f(x) = \text{Arctan}(\text{sh}(x))$.