CC N° 2 — Math. Sup. 2012-2013 — 2 h

I) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$, $a \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$

1) a) Etudier rapidement et représenter graphiquement $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - x^2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

c) Montrer que (u_n) est décroissante.

d) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite

2) On pose $v_n = nu_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) Montrer que (v_n) est croissante

c) Montrer que (v_n) converge vers un réel α tel que $\alpha \leq 1$

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n} u_1$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2} u_1$

c) Montrer que (S_n) diverge et déterminer sa limite

4) On pose $w_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Exprimer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $w_n - u_{n+1} + \alpha u_n$ en fonction de n, u_n et α

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \geq u_{n+1} - \alpha u_n$

5) On pose $t_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrer que (t_n) converge

b) Montrer, à l'aide du résultat de la question 4b) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \geq (1 - \alpha) S_n + u_{n+1} - u_1$

c) En déduire que $\alpha = 1$

II) Soit la courbe C de représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

i) Déterminer le tableau de variations.

ii) Déterminer les branches infinies.

iii) Déterminer les points doubles (c'est-à-dire résoudre $\begin{cases} x(t) = x(u) \\ y(t) = y(u) \end{cases}$)

iv) Déterminer les points d'intersection de C avec son asymptote oblique

v) Tracer C.

Barème : I = 12 points , II = 8 points
