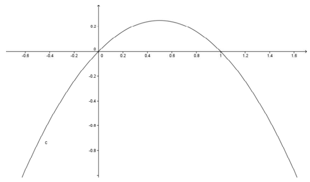
CC N° 2 Correction Math. Sup. 2012-2013 2 h

I) 1) a) f est une fonction polynômiale de degré 2, de racines 0 et 1, de coefficient dominant -1.

Elle est donc croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.



b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

$u_1 = f(a) = a - a^2$.

Comme $a \in \left]0;1\right[$, $a - a^2 = a\,(1 - a) \geq 0$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) \leq \frac{1}{4}$, en particulier $u_1 \leq \frac{1}{4}$.

La propriété est donc vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$. On suppose que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

f étant croissante sur $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, on a $f(0) \leq f\left(u_n\right) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{16} \leq \frac{1}{4}$:

La propriété est donc héréditaire.

Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n{}^2 \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, elle converge donc vers un réel x, tel que f(x) = x, à savoir 0.

2) a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

$a - a^2 - \frac{1}{2} = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0.$ La propriété est donc vraie au rang 1.

Soit $n \geq 1$. On suppose que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

f étant croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a : $f\left(u_n\right) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

Or, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{\left(n+1\right)^2}$, et $\frac{1}{n+2} - \frac{n}{\left(n+1\right)^2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)^2} \geq 0.$

On a donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{\left(n+1\right)+1}$.

La propriété est donc héréditaire.

Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = (n+1)\left(u_n - u_n{}^2\right) - nu_n = u_n\left(1-(n+1)u_n\right)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0$, et d 'après la question précédente, $1-(n+1)u_n \geq 0$, donc (v_n) est croissante.

c) D'après la question 2)a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$, donc la suite (v_n) est croissante, majorée par 1. Elle converge donc vers un réel α tel que $\alpha \leq 1$.

3) a) La suite (v_n) étant croissante, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq v_1$ et par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \dfrac{1}{n} u_1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} u_1 \geq n \times \frac{1}{2n} u_1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2} u_1$.

c) Si (S_n) convergeait vers S, il en serait de même de (S_{2n}), et par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on aurait $0 \geq \dfrac{1}{2} u_1$ ce qui est impossible car $a \in \left]0;1\right[$, donc $u_1 > 0$. La suite (S_n) est donc divergente.

De plus, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, la suite (S_n) est donc croissante et divergente.

Sa limite est $+\infty$.

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n - u_{n+1} + \alpha u_n = u_n\left(\alpha - nu_n\right)$

b) D'après la question 2c), la suite (v_n) converge en croissant vers α, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha - nu_n \geq 0$, et par suite $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \geq u_{n+1} - \alpha u_n$.

5) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(v_{k+1} - v_k\right) = v_{n+1} - v_1$.

La suite (v_n) étant convergente, il en est de même de (t_n).

b) D'après la question 4b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k \geq \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k = S_n - u_1 + u_{n+1} - \alpha S_n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, t_n - u_{n+1} + u_1 \geq (1-\alpha) S_n$.

(t_n) et (u_n) sont des suites convergentes, et (S_n) diverge vers $+\infty$. On a donc $\alpha = 1$

II i) $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2-1}{t} \\ y(t)=\dfrac{t+1}{t(t-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2} \\ y'(t)=\dfrac{-t^2-2t+1}{t^2(t-1)^2}=\dfrac{\left[t\left(1+\sqrt{2}\right)-1\right]\left[t\left(1-\sqrt{2}\right)-1\right]}{t^2(t-1)^2} \end{cases}$

t	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}-1$		1		$+\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

ii) En $\pm\infty$: la droite d'équation y = 0 est asymptote

En 1 : la droite d'équation x = 0 est asymptote

En 0 : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{(t-1)^2}=1$ et $\lim\limits_{t\to 0}(y(t)-x(t))=-2$.

La droite d'équation y = x – 2 est donc asymptote à la courbe.

iii) $\begin{cases} x(t)=x(u) \\ y(t)=y(u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-1}{t}=\dfrac{u^2-1}{u} \\ \dfrac{t+1}{t(t-1)}=\dfrac{u+1}{u(u-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)^2=(u-1)^2 \\ \dfrac{t^2-1}{t}=\dfrac{u^2-1}{u} \end{cases}$

Si $t\neq u$ on a : $t = 2 - u$ et $u^2 - 2u - 1 = 0$

Finalement, le point double est atteint pour les valeurs du paramètre égales à $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Il a pour coordonnées (2 ; 1).

iv) La courbe coupe l'asymptote oblique lorsque y(t) = x(t) – 2 ce qui donne t = 3 et par suite $x=\dfrac{8}{3}$ et $y=\dfrac{2}{3}$

v) Courbe :