**CC N° 3 Math. Sup. 2012-2013 2 h**

I) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$.

1) Dans cette question on considère $f : x \mapsto 1$.
Simplifier au maximum l'écriture de $\varphi_n(x)$.

2) Dans cette question on considère $f : x \mapsto x$.

a) $1 \leq p \leq n$, exprimer $p\binom{n}{p}$ en fonction de $\binom{n-1}{p-1}$

b) Simplifier au maximum l'écriture de $\varphi_n(x)$.

3) Dans cette question on considère $f : x \mapsto e^x$.

a) Simplifier au maximum l'écriture de $\varphi_n(x)$.

b) Déterminer la limite de $\varphi_n$ quand $n \to +\infty$

II) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n$

1°) Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A_n$ par $(X - 1)$.

2°) Soit $S_n = nX^n - X^{n-1} - \dots - X - 1$.

a) Montrer que $S_n$ est divisible par $(X - 1)$.

b) Déterminer le quotient de $X^{n+1} - 1$ par $(X - 1)$.

c) En calculant de deux façons différentes le polynôme dérivé de $X^{n+1} - 1$, déterminer le quotient dans la division euclidienne de $S_n$ par $(X - 1)$.

3°) Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A_n$ par $(X - 1)^2$.

III) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x}$.

1°) Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 que l'on notera h.

2°) La fonction h est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ ?

3°) Déterminer une équation de la tangente à $C_h$ (courbe représentative de h) en 0 ainsi que sa position par rapport à $C_h$.

---------------------

Barème : I = 7 points , II = 8 points , III = 5 points.

------------------------