CC N° 3 Correction Math. Sup. 2012-2013 2 h

I) $\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p}$.

1) $\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p(1-x)^{n-p} = (x+(1-x))^n = 1$

2) a) $p\binom{n}{p} = \frac{n!p}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)!}{\big((n-1)-(p-1)\big)!(p-1)!} = n\binom{n-1}{p-1}$

b) $\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{p}{n}x^p(1-x)^{n-p} = \sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}x^p(1-x)^{n-p}$

$= x\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}x^{p-1}(1-x)^{n-1-(p-1)} = x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$

$= x\left(x+(1-x)\right)^{n-1} = x$

3) a) $\varphi_n(x) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}e^{\frac{p}{n}}x^p(1-x)^{n-p} = \left(e^{\frac{1}{n}}x+(1-x)\right)^n$

b) $\left(e^{\frac{1}{n}}x+(1-x)\right)^n = e^{n\ln\left(1+x\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)}$

Quand $n \to +\infty$: $\ln\left(1+x\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right) \sim x\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \sim \frac{x}{n}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x) = e^x$.

II) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = nX^{n+1} - (n+1)X^n$

1) $\exists!(Q,R)\in(\mathbb{R}[X])^2 \,/\, A_n = (X-1)Q+R$ avec $\deg(R)<1$, donc $R = a = Cte$

Or $A_n(1) = a = -1$ et $A_n + 1 = nX^{n+1} - nX^n + X^n + 1 = nX^n(X-1) + (X-1)\sum_{i=0}^{n-1}X^i$

donc $A_n = \left(nX^n - \sum_{i=0}^{n-1}X^i\right)(X-1) - 1$

2) a) $S_n(1) = 0$ donc S_n est divisible par $(X-1)$.

b) $X^{n+1} - 1 = (X-1)\sum_{i=0}^{n}X^i$

c) Soit $P_n = X^{n+1} - 1$; $P_n' = (n+1)\,X^n = \sum_{i=0}^{n} X^i + (X-1)\sum_{i=1}^{n} iX^{i-1}$

On en déduit que $nX^n + X^n - \sum_{i=0}^{n} X^i = (X-1)\left(\sum_{i=1}^{n} iX^{i-1}\right)$ d'où $S_n = (X-1)\left(\sum_{i=1}^{n} iX^{i-1}\right)$.

3) $A_n = S_n\,(X-1) - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} iX^{i-1}\right)(X-1)^2 - 1$.

III) Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{x}$.

1) $\operatorname{ch}x \underset{0}{\sim} 1 + \dfrac{x^2}{2}$ donc $g(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{2}$. La fonction g est donc prolongeable par continuité en 0 en h telle que $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2) Pour $x \neq 0$, $\dfrac{h(x) - h(0)}{x} = \dfrac{\operatorname{ch}x - 1}{x^2}$ d'où $\dfrac{h(x) - h(0)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$

On en déduit que la fonction h est dérivable en 0. Elle est donc dérivable sur son domaine (par quotient de fonctions dérivables), et on a :

$$h'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) + 1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a : $x\,\operatorname{sh}(x) = x\left(x + o_0\left(x^2\right)\right)$ et $\operatorname{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o_0\left(x^3\right)$,

d'où $h'(x) = \dfrac{1}{2} + o_0(x)$

On en déduit que la fonction h' est continue en 0, étant continue ailleurs par les théorèmes généraux, on en déduit que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) $h(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{24} + o_0\left(x^3\right)$, on en déduit que la tangente à C_h est la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$, et qu'au voisinage de O, la courbe est en dessous de la tangente pour $x < 0$, et au dessus pour $x > 0$.